FEUILLE 5 - DIFFÉRENTIELLE, DÉRIVÉES PARTIELLES, GRADIENT

I Différentielle, dérivées partielles, gradient

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy} - 2e^2xy$. Calculer, pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = (h,k)$, le nombre $Df(2,1).\overrightarrow{v}$.

Exercice 2.—

1. Montrer que l'application "produit" $(x,y) \mapsto xy$, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner sa différentielle en un point (x,y).

2. Plus généralement, montrer que l'application "produit scalaire" $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$, définie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et donner sa différentielle.

Exercice 3.— A tout polynôme P à coefficients complexes de la forme $P(z) = a_nz^n + ... + a_1z + a_0$, on associe l'application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$p(x,y) = (Re(P(x+iy)), Im(P(x+iy)))$$

1. Montrer que $z \mapsto P(z)$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ au sens où $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{P(z)-P(z_0)}{z-z_0}$ existe pour tout complexe z_0.

2. Montrer alors que p est différentiable et calculer sa différentielle *(on pourra utiliser un développement limité complexe de $P(z)$)*.

3. On considère l'application $f : (x,y) \mapsto \frac{(x+iy)^3-(x-iy)^3}{2i}$: montrer que f est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $\nabla_{(x,y)}f$.

Exercice 4.— Calculer la différentielle de l'application $f \mapsto \int_0^1 (f(t))^2dt$, définie de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, en un point α quelconque.

Exercice 5.— **1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Donner les différentielles de fonctsion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\phi(x) = f(x,-x)$ et $\psi(x,y) = f(y,x)$.

2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications différentiables. Calculer les dérivées partielles de la fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x,y,z) = f(g(y^2+z), h(x+yz))$.

3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications différentiables. Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x,y) = g(xy^2f(x,y))$ est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

Exercice 6.— Calculer la différentielle des applications $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies par $f(A) = A^2$ et $g(A, B) = tr(AB)$

Exercice 7.— Montrer l'unicité de la différentielle en un point. *On pourra suivre les indications du poly.*

I.2 Exercices de niveau standard

Exercice 8.—

1. Soit $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée dérivable. Rappeler la formule pour la dérivée de $g \circ \gamma$ en $t = 0$ en terme de gradient de g.

2. On suppose maintenant que g admet un maximum local en un point P_0. Montrer que le gradient de g s'annule au point P_0. *Indication : on pourra utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable : si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ admet un maximum en $t = 0$ alors $f'(0) = 0$; voir aussi le poly.*

3. Soit $f : O \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur un ouvert O de $\mathbb{R}^m$. On suppose que le gradient de f s'annule sur O.

a. On suppose d'abord que O est une boule ouverte. Montrer que f est constante sur O. *Indication : on pourra énoncer et utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable, ainsi que la convexité des boules ouvertes.*

b. En déduire le cas où O est un ouvert connexe.

Exercice 9.— On se place sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer les points où $||.||_2$ est différentiable. Calculer son gradient le cas échéant.

Exercice 10.— Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On dit que f est *homogène de degré r* lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, f(tx) = t^r f(x)$. On dit que f vérifie la propriété d'Euler lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, gradf(x)\rangle = rf(x)$. Montrer que ces deux propriétés sont équivalentes.

Exercice 11.— **1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ sinon. Vérifier que f possède en $(0, 0)$ des dérivées dans toutes les directions. Y est-elle continue ? différentiable ?

2. Mêmes questions avec $g(x, y) = x^3y/(x^4 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(x, y) = 0$ sinon.

Exercice 12.— On s'intéresse à l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Calculer la différentielle de det en la matrice identité..

3. En déduire la différentielle de det en A pour toute matrice inversible A.

4. En déduire la différentielle de det en tout point.

Exercice 13.—(Examen deuxième session 2014-2015) On considère une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :

Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\overrightarrow{h}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec $o(\overrightarrow{h})$ négligeable devant $\overrightarrow{h}$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0, R)$ de $\mathbb{R}^N$.

I.3 Compléments et challenges

Inversion de matrice Pour toute matrice H de norme matricielle $\|H\| < 1$, la matrice $\mathrm{Id} + H$ est inversible et on a

$$(\mathrm{Id} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \mathrm{Id} - H + o(H)$$

en posant

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k.$$

Exercice 14.—

1. On admet provisoirement que $o(H)$ est négligeable devant H. Interpréter très précisément ce qui précède en terme de différentielle de l'application $M \mapsto M^{-1}$.

2. Pour montrer que $o(H)$ est négligeable devant H, majorer la norme de $o(H)$, par exemple pour tout $\|H\| < \frac{1}{2}$. On commencera par mettre H^2 en facteur.