Feuille 4 - Connexité, espaces vectoriels normés

I Connexité

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.—

1. Montrer que l'image d'un espace métrique connexe par arcs par une application continue est un espace métrique connexe par arcs *(indication : on commencera par introduire des notations et préciser les hypothèses)*.

2. En déduire que la connexité par arcs est une propriété invariante par homéomorphisme *(même indication)*.

Exercice 2.— Montrer que la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est connexe par arcs.

Exercice 3.— (critère pratique de connexité) La caractérisation suivante de la connexité est très utile : *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0,1\}$ est constante*. Démontrer cette caractérisation.

Exercice 4.— Parmi les espaces suivants dire ceux qui sont connexes (par arcs) :

$$\mathbb{R}^* \; ; \; \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \; ; \; \mathbb{R} \times \{0;1\} \; ; \; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x+y+2z < 10\} \; ; \; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2\}$$

Exercice 5.—

1. Soit (X,d) un espace compact non-connexe. Montrer qu'il existe deux fermés Y, Z et $\varepsilon > 0$ tels que $X = Y \cup Z$ et pour tout $(y,z) \in Y \times Z$ on a $d(y,z) \geq \varepsilon$.

2. Donner un exemple d'espace métrique (X,d) qui est réunion disjointe de deux fermés $X = Y \sqcup Z$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $(y,z) \in Y \times Z$ tel que $d(x,y) < \varepsilon$.

Exercice 6.— Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que X est connexe si et seulement si ses seuls ouverts-fermés sont X et $\emptyset$.

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 7.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait) La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

Exercice 8.— Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$ deux parties connexes de X. On suppose que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 9.—

1. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe au cercle unité du plan. *(Aide : enlever un point, et utiliser la connexité...)*

2. Montrer, avec la même méthode, que la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 10.— Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe *(indication : utiliser le bon critère... Voir le poly !)*

Exercice 11.— Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Soit $\gamma; [0; 1] \to X$ un chemin continu tel que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$. Montrer qu'il existe $t \in [0; 1]$ tel que $\gamma(t) \in \mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 12.—

1. Montrer que le plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (où l'on voit $GL_n(\mathbb{C})$ comme sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$).

Exercice 13.— (Version en dimension un du théorème de Borsuk-Ulam). On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de centre 0 dans le plan ; on le voit comme un sous-espace métrique du plan. Soit f une application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points du cercle, diamétralement opposés, qui ont la même image par f. *Aide : utiliser la connexité du cercle et la fonction auxiliaire définie par $g(v) = f(v) - f(-v)$ (noter que v et $-v$ sont diamétralement opposés).*

Exercice 14.— Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

I.3 Compléments et challenges

Exercice 15.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer que tout ouvert connexe est connexe par arcs.

Exercice 16.— On note A le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle du type $]0, \pi]$.

1. Montrer que sur n'importe quel intervalle du type $[1/(a+2\pi), 1/a]$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1. Dessiner le graphe au-dessus d'un intervalle de ce type lorsque x est très proche de 0.

2. Montrer que $\bar{A} = A \cup \{0\} \times [-1, 1]$.

3. Montrer que A est connexe par arcs. En déduire que $\bar{A}$ est connexe.

4. Pour montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs, on raisonne par l'absurde, en considérant un chemin $\gamma : [0, 1] \to \bar{A}$ allant du point du graphe d'absisse π à un point $(0, 0)$ du segment vertical ; on note $\gamma_x(t), \gamma_y(t)$ les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans le plan.

a. Montrer qu'il existe $\tau \geq 0$ tel que le point $\gamma(\tau) = (0, y_0)$ est sur le segment vertical mais tous les points $\gamma(t)$ avec $t < \tau$ sont sur le graphe.

b. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, et $x = \gamma_x(\tau - \varepsilon)$. Montrer qu'il existe $t \in]\tau - \varepsilon, \tau[$ tel que

$$\frac{1}{\gamma_x(t)} = \frac{1}{x} + 2\pi.$$

c. En déduire que pour tout point $(0, \alpha)$ du segment, il existe une suite (t_n) croissante et convergeant vers τ telle que la suite $(\gamma_y(t_n))$ converge vers $(0, \alpha)$.

d. Conclure en montrant que γ ne satisfait pas le critère de continuité séquentiel en τ.

Exercice 17.— Montrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est connexe *(indication : voir la recette de preuve dans le poly).*

Exercice 18.— Montrer que le plan privé d'un nombre au plus dénombrable de compacts convexes deux à deux disjoints est connexe par arcs.

Exercice 19.— Soient U et V deux ouverts connexes de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathrm{Fr}(U) \cap \mathrm{Fr}(V) \neq \emptyset$$

L'intersection $U \cap V$ est-elle nécessairement connexe ?

II Espaces vectoriels normés

II.1 Assimilation du cours

Exercice 20.— Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé E sont convexes : si C est un point de E, r un réel strictement positif, et P, Q deux points de la boule $B(C, r)$, alors tout point M du segment $[P, Q]$ est encore dans $B(C, r)$.

Exercice 21.— On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver par un calcul direct un nombre m tel que, pour tout vecteur x, $\|Ax\|_\infty \leq m \|x\|_\infty$.
2. Trouver un vecteur x, de norme 1, pour lequel l'inégalité précédente est une égalité.
3. En déduire la norme matricielle de A.

Exercice 22.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

II.2 Exercices de niveau standard

Exercice 23.— **1.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. En considérant $E \times F$ comme un espace vectoriel, montrer que $\max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$ est une norme sur $E \times F$.
2. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes dans $(E, \|.\|)$.
  a. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est convergente.
  b. Si (λ_n) est une suite convergente de réels, montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge.
  c. Ces deux résultats s'interprètent en disant que deux application sont continues, lesquelles ?
3. **a.** Montrer, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

  b. Interpréter cette inégalité en termes d'application lipschitzienne.

Exercice 24.—(Transport de norme) Soit $f : E \to F$ une application linéaire et N une norme sur F. A quelle condition l'application $N \circ f$ est-elle une norme sur E ?

Exercice 25.—Soit E un espace vectoriel normé, $P \in E$ et $r > 0$. Démontrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(P, r)$ est la boule fermée $B_f(P, r)$.

Exercice 26.—

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Déterminer la norme associée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : il s'agit de généraliser l'exercice 21, en reprendre la démarche.*

2. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$. Démontrer que la norme d'une matrice A symétrique (${}^{\mathrm{t}}A = A$) est égale à son *rayon spectral* $\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)} |\lambda|$ où $\mathrm{Spec}(A)$ désigne le *spectre* de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

Exercice 27.—Soit E un espace vectoriel normé. On veut montrer que le seul sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide est E. Pour ceci, on considère un sous-espace vectoriel F.

1. On suppose que F contient une boule $B(x, r)$. Montrer que F contient alors la boule $B(0, r)$.

2. En déduire que $F = E$.

Exercice 28.— Soit $L : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

1. On suppose que L est bornée sur une boule $B(0, r)$ de centre 0. Montrer que L est bornée sur $B(0, 1)$.

2. Sous les mêmes hypothèses, en déduire que L est lipschitzienne.

3. Réciproquement, montrer que si L est continue, alors elle est bornée sur une boule centrée en 0.

Exercice 29.— **1.** Expliquer pourquoi que les trois applications suivantes sont des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels par

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_\infty = \max_{k=0,\ldots,n} |a_k| \qquad \|P\|_* = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

2. Montrer qu'elles sont deux à deux non équivalentes. *Indication : on pourra considérer les polynômes $P_n = (X-1)^n$ et $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$.*

Exercice 30.— Applications bilinéaires

1. Soit $b : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer les équivalences entre :

(i) b est continue,

(ii) b est continue en $(0, 0)$,

(iii) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\|b(x_1, x_2)\|_F \le C \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}.$$

2. Montrer que la quantité

$$\|(x_1, x_2)\| \overset{def}{=} \sup_{x_1\in B_{E_1}(0,1), x_2\in B_{E_2}(0,1)} \|b(x_1, x_2)\|_F$$

définit une norme sur l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues.

3. Montrer qu'en dimension finie toutes les applications bilinéaires sont continues.

On aurait des résultats analogues pour les applications multilinéaires continues (voir Wikipedia).

Exercice 31.—(Examen deuxième session 2017) On note E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient :

— $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;
— $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

1. a. Montrer que toute fonction $f \in E$ s'annule.
b. En déduire que si $f \in E$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$

2. a. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Montrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
b. Montrer que $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach.

On munira dorénavant E de cette norme. Pour tout $f \in E$, on définit une fonction $\Phi(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(f)(x) = f(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

3. a. Vérifier que $\Phi(f)$ appartient à E.
b. Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E.
c. A l'aide du théorème du point fixe, montrer que pour tout $g \in E$, l'équation $\Phi(f) = g$ a une unique solution dans E.
d. Montrer que Φ est inversible et que Φ^{-1} est continu.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 32.—
1. Rappeler pourquoi la boule unité fermée est compacte dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
2. En utilisant l'équivalence des normes, en déduire que c'est encore le cas lorsqu'on muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme quelconque.
3. Montrer le théorème de Riesz : E est un espace vectoriel normé dans lequel la boule unité fermée $B^f(0,1)$ est compacte si et seulement s'il est de dimension finie. *Aide : voir le poly.*

Exercice 33.— (Hyperplans et formes linéaires) Soit E un espace vectoriel normé et H un *hyperplan* de E, c'est-à-dire le noyau $\ker\varphi$ d'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non nulle. Montrer l'alternative suivante :
— soit φ est continue et H fermé dans E,
— soit φ n'est pas continue et H dense dans E.
Indication : si φ n'est pas continue, construire une suite (y_n) d'éléments de E qui converge vers 0 et vérifiant $\varphi(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34.— Soit E un espace de Banach, et $u \in \mathcal{L}_c(E,E)$. On suppose $||u|| < 1$ et on pose $v = Id - u$.
1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ est convergente dans $\mathcal{L}_c(E,E)$. On note w sa somme.
2. Montre que $w \circ v = v \circ w = Id$. En déduire que v appartient à $\mathcal{GL}_c(E)$.
3. Montrer que $\mathcal{GL}_c(E)$ est ouvert.