Feuille 3 - Compléments

Exercice 1.— Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{N\to+\infty} \sup\{u_n \mid n \geq N\} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{N\to+\infty} \inf\{u_n \mid n \geq N\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. Montrer que ces objets sont bien définis, et qu'on a la relation

$$\limsup_{n\to+\infty} -u_n = -\liminf_{n\to+\infty} u_n$$

2. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$, avec égalité si et seulement si (u_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Le cas échéant, déterminer la limite de (u_n).

3. On suppose $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n). Que dire lorsque $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$? Et lorsque $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$?

4. On suppose $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n). Que dire lorsque $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$? Et lorsque $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$?

Exercice 2.— Montrer le théorème du point fixe suivant :

Théorème : Soient (X, d) compact et $T : X \to X$ une application contractante, c'est-à-dire :

$$\forall x \neq y \in X, d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

Montrer que T admet un unique point fixe.

Exercice 3.— Soit $f :]0; +\infty[\to]0; +\infty[$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $k \in]0; 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x|f'(x)| \leq kf(x)$$

Montrer que f admet un unique point fixe. *Indication : on pourra considérer la distance $\delta(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \delta)$ est un espace complet.*

Exercice 4.— Soit $k > 0$. Montrer que l'ensemble $\{f : [0; 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne et croissante}\}$ muni de la distance d_∞ est un espace compact. Que dire de l'espace des applications k-lipschitzienne (toujours pour la distance d_∞) ?

Montrer que l'application définie pour $x \in [0; 1]$ par

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} ... \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) ...\right)\right)$$

(où sin apparaît n fois dans le terme du produit) est k-lipschitzienne pour k assez grand.