Feuille 3 - Complétude, compacité

I Complétude

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Écrire la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy dans X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in B(x, \varepsilon)$$

Exercice 3.— Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d).

1. Soit $a \in X$. Montrer que la suite $(d(a, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En déduire que la suite (x_n) est bornée.

2. Soit $L : X \to \mathbb{R}_+$ définie par $L(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(a, x_n)$. Montrer que L est 1-lipschitzienne.

3. Déterminer $\inf\limits_{a\in X} L(a)$ et montrer que l'infimum est atteint si et seulement si la suite (x_n) converge.

Exercice 4.— On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \log(n)$.

1. Calculer la limite de la suite $d(u_{n+1}, u_n)$.

2. La suite (u_n) est-elle de Cauchy ?

Exercice 5.— Montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n.$$

Exercice 6.— Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet. On donnera trois arguments différents :

1. à l'aide de la proposition sur les sous-espaces métriques,

2. à l'aide de la propriété disant qu'une suite convergente est de Cauchy,

3. en utilisant juste la définition d'une suite de Cauchy.

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 7.— Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique X, (y_n) une autre suite dans X, on suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite (y_n) est aussi une suite de Cauchy.

Exercice 8.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer qu'il est complet si et seulement si la sphère unité $S = \{\in E \mid ||x|| = 1\}$ est complète pour la distance induite.

Exercice 9.— Déterminer parmi les espaces suivants lesquels sont complets :

1. L'espace $\{f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(s)ds = 1\}$, muni de la distance $d(f, g) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t) - g(t)|$

2. L'espace $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$

3. L'espace $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$

4. L'espace $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$

5. L'espace vectoriel ℓ^∞ des suites réelles bornées, muni de la norme $||(u_n)||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

6. L'espace vectoriel ℓ^1 des suites réelles sommables, muni de la norme $||(u_n)||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

Exercice 10.— Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.

Exercice 11.— Soit Φ un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]0, 1[$; on peut par exemple prendre

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}$ en "transportant la distance de $]0, 1[$ par Φ^{-1}", c'est-à-dire définie par

$$d(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)| \,.$$

1. Rappeler pourquoi $]0, 1[$, muni de la distance usuelle, n'est pas complet. En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

2. La distance d définit-elle les mêmes ouverts que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12.— On considère une application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui est de la forme $x \mapsto x + \Phi(x)$ où $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application qui est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

1. Montrer que T est bijective. *Indication : transformer le problème en une recherche de point fixe... En cas de panne on pourra comparer à l'exercice 21 du poly de calcul différentiel.*

2. Montrer que T est un homéomorphisme (on pourra montrer que l'inverse de T est lipschitzienne).

Exercice 13.— Soit (X, d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.
2. Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.
3. Montrer que X est complet ssi toute suite ayant $(*)$ converge.

Exercice 14.— Soit (X, d) un espace métrique complet et $f \colon X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p, la composée p fois de f, soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 15.—(Examen deuxième session 2014-2015)

1. L'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)|,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.

2. Soit $\Phi : [-1, 1] \to [-1, 1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1, 1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0, 1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1, 1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x - y|.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n \geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

I.3 Compléments et challenges

Exercice 16.—(Théorème de prolongement) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que (Y, δ) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f \colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g \colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Exercice 17.— Démontrer le théorème de Baire :

Dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

II Compacité

II.1 Assimilation du cours

Exercice 18.—
1. Donner un exemple de suite réelle ayant deux valeurs d'adhérence. Représenter cette suite sur un dessin.

2. Donner un exemple de suite réelle ayant une seule valeur d'adhérence, mais admettant une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Faire un dessin. Cette suite est-elle convergente ?

Exercice 19.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

1. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

2. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

3. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

Exercice 20.— On munit $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) de sa topologie naturelle, et les parties $A \subset \mathbb{R}^N$ de la topologie induite. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

1) $\mathbb{Z}$
2) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$
3) $\{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}^*, 0 \leq y \leq 1/n\}$
4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

Exercice 21.— Montrer que les espaces $[0, 1]$ et $]0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 22.— Montrer que l'application $x \mapsto x^2$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas uniformément continue.

Exercice 23.— Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Exercice 24.— Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers une limite notée x. Montrer que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X.

II.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 25.— Dans un espace métrique compact, montrer que toute suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 26.— Montrer que dans tout espace métrique, une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. En déduire que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 27.— Soit (X, d) un espace métrique compact.

1. On suppose X discret. Montrer que X est fini.

2. Montrer que X contient une partie au plus dénombrable dense. On dit que X est *séparable*.

3. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides de X, deux à deux disjoints. Montrer que I est au plus dénombrable.

Exercice 28.— Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est dite *propre* si, pour tout compact K et Y, $f^{-1}(K)$ est un compact de X. On travaillera ici avec une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est propre si et seulement si $||f(x)|| \to +\infty$ lorsque $||x|| \to \infty$.

2. On suppose f propre. Montrer que f est fermée (i.e. l'image de tout ensemble fermé est un fermé).

3. On suppose f propre et continue. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 29.— Soient (X, d) un espace métrique et K un compact non vide de X. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X,\ \ d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 30.— Soit (X, d) un espace métrique. Soient F un fermé non vide de X et K un compact non vide de X.

1. Montrer que la distance $d(F, K)$ est atteinte (i.e. il existe $x \in F$ et $y \in K$ tels que $d(x, y) = d(F, K)$).

2. Ce résultat est-il encore vrai si K est seulement supposé fermé ?

Exercice 31.— On se place dans $C_b([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout n, soit $f_n : x \mapsto x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ lorsque m est très grand ? Formaliser. En déduire que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 32.—(partiel 2012) Soit X un espace métrique compact, et A une partie de X. On suppose que A est *localement finie* : pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A.

1. Montrer que A ne contient qu'un nombre fini de points.

2. (*) Montrer que le résultat ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

Exercice 33.— Trouver l'erreur dans la réponse suivante à la première question de l'exercice précédent. *Par hypothèse, pour tout x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $B(x, \varepsilon) \cap A$ ne contient qu'un nombre fini de points. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_k, \varepsilon)$. On a*

$$A \subset A \cap B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup A \cap B(x_k, \varepsilon)$$

et puisque A est une réunion finie d'ensembles finis, il ne contient qu'un nombre fini de points.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 34.— Montrer que l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux est dense dans $(C([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$. *Aide : utiliser la continuité uniforme.*

Exercice 35.— (Une autre preuve du lemme de Lebesgue) On se place sous les hypothèses du lemme de Lebesgue, c'est-à-dire qu'on considère un recouvrement d'un espace métrique compact X par des ouverts U_i. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$R(x) = \sup\{r > 0, \exists i \in I, B(x, r) \subset U_i\}.$$

Faire un dessin. Montrer que cette formule définit une fonction de X dans $]0, +\infty[$, et que cette fonction est continue (elle est même 1-lipschiptzienne). En déduire une nouvelle preuve du lemme.

Exercice 36.—(produit infini d'espaces compacts) Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante :

$$\delta(u, v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k)))$$

1. Vérifier que δ est effectivement une distance.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ et soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que :
$$\lim_{n \to \infty} \delta(u_n, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to \infty} d(u_n(k), u(k)) = 0.$$
3. Montrer que $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ est compact.
4. Montrer que U est un ouvert de $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ si et seulement si pour tout x dans U, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et un réel strictement positif α vérifiant :
$$\forall y \in X^{\mathbb{N}}, \forall j \in J, \quad d(y(j), x(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$

Exercice 37.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer que les compacts de E sont d'intérieur vide.

Indication : on pourra utiliser le théorème de compacité de Riesz.