Feuille 2 - Espaces Métriques

I Assimilation du cours

Exercice 1.— Écrire à l'aide de quantificateurs :

(1) O est un ouvert de X
(2) la caractérisation métrique de l'intérieur d'une partie E de X
(3) la caractérisation métrique de l'adhérence d'une partie E
(4) la définition de la frontière
(5) E est dense dans X
(6) E est d'intérieur vide dans X
(7) la définition d'une suite convergente.

Exercice 2.— Montrer que l'union d'un nombre fini de parties fermées est une partie fermée. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.

Exercice 3.— Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de Y est une partie fermée de X.

Exercice 4.— (unicité de la limite) Montrer que si une suite (x_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 5.—

1. Donner une caractérisation métrique de la frontière de E.

2. Montrer que $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X \setminus E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$. En déduire une autre expression pour la frontière de E.

Exercice 6.— Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(\mathrm{Inte}(A)) \subset \mathrm{Inte}(f^{-1}(A))$, pour toute partie $A \subset Y$.

2. Même question pour $\mathrm{Adhe}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Adhe}(A))$.

3. Soient $A, B \subset X$ tels que $\mathrm{Adhe}(A) = \mathrm{Adhe}(B)$. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Adhe}(f(A)) = \mathrm{Adhe}(f(B))$.

Exercice 7.—(caractérisation métrique de l'adhérence) Montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de E si et seulement si toute boule ouverte centrée en x rencontre E.

Exercice 8.— Soient E et F deux parties d'un espace métrique (X, d).

1. Comparer $\mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(F)$ et $\mathrm{Adhe}(E \cap F)$.

2. Même question pour $\mathrm{Adhe}(E) \cup \mathrm{Adhe}(F)$ et $\mathrm{Adhe}(E \cup F)$.

3. Si A est ouvert, montrer que $A \cap \mathrm{Adhe}(B) \subset \mathrm{Adhe}(A \cap B)$. Qu'en est-il si A n'est pas ouvert ?

Exercice 9.—(Parties denses) Soit (X, d) un espace métrique, et $D \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. D est dense dans X (i.e. $\mathrm{Adhe}(E) = X$).

2. Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap D \neq \emptyset$.

3. Le complémentaire de D dans X est d'intérieur vide.

4. L'espace X est l'unique fermé contenant D.

Exercice 10.— Donner une preuve séquentielle de la continuité de la composée de deux applications continues.

Exercice 11.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert,

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé,

3. l'intérieur de l'image par Φ d'un ensemble E est égal à l'image de l'intérieur de E,

4. l'adhérence de l'image est égale à l'image de l'adhérence,

5. l'image d'une suite convergeant vers x est une suite convergeant vers $\Phi(x)$,

II Exercices de niveau attendu

Exercice 12.—

1. Soit O un ouvert du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(\mathrm{Adhe}(O)) = O$?

2. Donner un exemple de partie A du plan qui est contenue strictement dans sa frontière.

3. Une partie du plan est-elle toujours ouverte ou fermée ?

4. Donner un exemple de partie X du plan contenant un point x avec la propriété suivante : dans le sous-espace métrique X, l'adhérence de la boule ouverte $B_1(x)$ n'est pas la boule fermée $B_1^f(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq 1\}$.

Exercice 13.— Montrer que si Y est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux éléments a, b **dans** Y tels que $Y \subset [a, b]$.

Exercice 14.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. On se place dans l'espace $(\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ des applications bornées. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Déterminer explicitement un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue.

Exercice 15.—(distance à un sous-ensemble)

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X,d) \to (X',d')$ est k-lipschitzienne si $\forall (x,y) \in X^2, d'(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.
2. Soient (X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On pose $d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. Montrer que cela est fini. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.
3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).
4. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$.)
6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x,y) : (x,y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

Exercice 16.—

1. Dans un espace métrique X, on considère une suite (x_n) qui converge vers un élément x et une suite (y_n) qui converge vers un élément y. Montrer que la suite des distances $(d(x_n,y_n))$ converge vers le nombre $d(x,y)$.

2. Interpréter le résultat comme une propriété de l'application distance.

Exercice 17.— Soit α un irrationnel. Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $A = \{m + n\alpha \mid m,n \in \mathbb{N}\}$, puis de l'ensemble $B = \{m + n\alpha \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.

On pourra utiliser le fait suivant : il existe deux suites $(p_n),(q_n) \in \mathbb{N}^N$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} (q_n\alpha - p_n) = 0$$

Exercice 18.—

1. Montrer que tous les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

2. Montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

3. Montrer que $[0,1]$ et $[0,1] \cup [2,3]$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 19.— **1.** Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on considère les ensembles $[0;1]$, $[0;1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}$? fermés dans $\mathbb{R}$? Déterminer leur adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. On munit $\mathbb{R}^*$ de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. La partie $]0;1]$ est-elle ouverte dans $\mathbb{R}^*$? est-elle fermée ?

Exercice 20.—(Valeurs d'adhérence)
1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.
2. En utilisant la question précédente et l'exercice 17, montrer que l'ensemble $\{cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1;1]$.

Exercice 21.— Dans l'espace métrique $X = C_b([0,1],\mathbb{R})$ on considère la partie

$$X_0 = \{f \in C_b([0,1],\mathbb{R}) \ \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée de X.
2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.
3. En déduire qu'il est d'intérieur vide.
4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé. (**) Déterminer son intérieur.

Exercice 22.— On note ℓ^∞ l'espace des suites complexes bornées, c_c le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, c_0 celui des suites qui convergent vers 0. On munit ces espaces de la norme définie par $||x|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, et de la distance associée d.
1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞.
3. Montrer que c_c est dense dans c_0.
4. Est-ce que c_c est dense dans ℓ^∞ ? Sinon, quelle est son adhérence ?

III Compléments et exercices dfficiles

Espaces de matrices Soit n un entier positif. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$, ce qui en fait un espace métrique lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{n^2}$ de l'une des métriques habituelles. Par exemple, l'application

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$$

identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$, et la métrique d_1 s'écrit

$$d_1(M,M') = \max\{|a-a'|\,, |b-b'|\,, |c-c'|\,, |d-d'|\}.$$

Exercice 23.— On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. On rappelle aussi que l'application déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, par exemple $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'autre part une matrice est inversile si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M_0 une matrice particulière. Rappeler pourquoi il n'existe qu'un nombre fini de valeur de $t \in \mathbb{R}$ qui annule l'expression $\det(M_0 + t\mathrm{Id})$. En déduire qu'on peut trouver une suite (t_n) de réels tendant vers 0 tels que, pour tout n, la matrice $M_0 + t_n\mathrm{Id}$ est inversible. Comment s'interprète ce résultat, en termes de propriété topologique de la partie $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Une application. On veut montrer l'identité $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ concernant la trace (somme des termes diagonaux) d'une matrice.

a. Il est assez facile de voir que la trace d'une matrice est invariante par conjugaison : autrement dit, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ (ceci vient par exemple du fait que le polynôme caractéristique d'une matrice est invariant par conjugaison ; mais admettons ce fait). En déduire que l'identité recherchée est vraie lorsque la matrice M est inversible.

b. Utiliser la question 2 pour en déduire que l'identité est encore vraie lorsque M n'est pas inversible.

Exercice 24.— **1.** Soit $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer que c'est un ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Même question pour l'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que $MM^t = \mathrm{Id}$.

Exercice 25.—(Distance de Hausdorff) Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff définie par la formule

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_1, E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2, r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1, r)\}$$

où

$$V(E, r) = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < r\}$$

est le r-voisinage de E (voir le poly, section c des commentaires sur la complétude). On voudrait montrer que les axiomes de distances sont bien vérifiés. La symétrie est évidente...

1. Soient E_1, E_2 des fermés bornés non vides tels que $d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_1, E_2) = 0$. Supposons qu'il existe un point x de E_1 qui n'est pas dans E_2. Construire une suite de points de E_2 qui converge vers x. Qu'en déduit-on ? Montrer que la distance de Hausdorff vérifie l'axiome de séparation.

2. On voudrait maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. On considère trois ensemble fermés bornés non vides E_1, E_2, E_3. On note $d_{12} = d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_1, E_2)$, $d_{23} = d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_2, E_3)$, on se donne un $\varepsilon > 0$.

Soit x un point de E_1. Trouver un point z de E_3 tel que $d(x, z) < d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$. Qu'a-t-on montré, en termes de r-voisinages où $r = d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$? En déduire que $d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_1, E_3) \leq r$. Conclure.

Exercice 26.—(Deuxième théorème de Dini) Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers f. On suppose que f est continue. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 27.— Soient E et F deux fermés disjoints d'un espace métrique (X,d). Montrer qu'il existe U et V deux ouverts de X qui séparent E et F, c'est-à-dire qui vérifient

$$E \subset U \quad \text{et} \quad F \subset V \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset$$

Exercice 28.—(Théorème de prolongement de Tietze) Soient (X,d) un espace métrique, E un fermé de X, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer qu'il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $g_{|E} = f$ et

$$\sup_{x\in X} g(x) = \sup_{y\in E} f(y) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in X} g(x) = \inf_{y\in E} f(y)$$

Exercice 29.— Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ surjective, continue, et propre, mais qui n'est pas un homéomorphisme.