Feuille 1 - Ouverts et Espaces Métriques

Exercice 1.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X.

Exercice 2.— Donner un exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne usuelle, d'une famille de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas ouverte.

Exercice 3.— Soient E, F deux parties du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(E \cup F) = \mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F)$? Et $\mathrm{Inte}(E \cap F) = \mathrm{Inte}(E) \cap \mathrm{Inte}(F)$?

Exercice 4.— Montrer qu'une application affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 5.—

1. Trouver une fonction continue et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert.

2. Trouver une fonction qui n'est pas continue mais qui vérifie :
pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y (on dit que f est *ouverte*).

3. Même question que **2.**, mais avec X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés (définition page suivante).

Exercice 6.— Trouver deux distances non nulles d_1 et d_2 sur un même ensemble X telles que les espaces métriques (X, d_1) et (X, d_2) n'admettent pas les mêmes ouverts.

Exercice 7.—(Espaces produits)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On veut munir d'une distance le produit

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Pour cela, on considère les applications d_1, d_2, d_∞ définies par

$$d_1((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) := \big((d_X(x, x')^2 + (d_Y(y, y')^2)\big)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\left(d_X(x, x'), d_Y(y, y')\right).$$

1. Montrer que chacune de ces formules définit bien une distance sur $X \times Y$.

2. On veut montrer qu'une partie O de $X \times Y$ est ouverte pour la distance d_1 si et seulement si elle est ouverte pour la distance d_∞.

a. Soient P_0 et P deux points de $X \times Y$. Montrer les inégalités

$$d_1(P_0, P) \leq 2d_\infty(P_0, P) \text{ et } d_\infty(P_0, P) \leq d_1(P_0, P).$$

b. En déduire que toute d_1-boule ouverte centrée en un point P_0 de $X \times Y$ contient une d_∞-boule ouverte, et réciproquement.

c. En déduire le résultat.

3. Montrer que la distance d_2 définit également les mêmes ouverts que d_1 et d_∞.

On rappelle que le couple $(E, ||.||)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si l'application $||.|| : E \mapsto \mathbb{R}$ est une norme. C'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants :

1) Positive : $||.||$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

2) Positivement homogène : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$

3) Séparation : pour $x \in E$, si $||x|| = 0$, alors $x = 0$

4) Inégalité triangulaire : pour $x, y, z \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Exercice 8.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie $X \subset E$ est dite *convexe* si pour tous vecteurs $x, y \in X$ et tout $\lambda \in [0; 1]$, on a encore

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$$

Elle est dite symétrique si pour tout vecteur $x \in X$, on a $-x \in X$.

1. Constater que la boule $B = \{x \in E \mid ||x|| < 1\}$ est convexe, ouverte, symétrique et contient 0.

2. Soit maintenant une partie $C \subset E$ ouverte et contenant 0. Pour tout $x \in E$, on note

$$I(x) = \{\alpha > 0 \mid x/\alpha \in C\}$$

Vérifier que l'application $p : E \to \mathbb{R}_+$ obtenue en posant $p(x) = \inf I(x)$ est bien définie.

3. On suppose de plus que C est symétrique. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

4. On suppose de plus que C est convexe. Montrer que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

5. Etablir l'égalité $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.

6. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $c_1 p(x) \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.

7. On suppose de plus que C est bornée.

a. Montrer que $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

b. Prouver l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que $||x|| \leq c_2 p(x)$ pour tout $x \in E$.

8. Montrer que p est l'unique norme sur E telle que $\{x \in E \mid p(x) < 1\} = C$.
