Espaces Métriques

I Espaces métriques

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X.

Exercice 2.— Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. À l'aide de quantificateurs, écrire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 3.— Montrer que dans un espace métrique (X, d), toute boule fermée est une intersection dénombrable de boules ouvertes. Énoncer et démontrer un résultat analogue pour les boules ouvertes.

Exercice 4.— Soit A un ensemble et n un entier strictement positif. On note X l'ensemble des suites $\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ à valeurs dans A. Pour toutes suites $\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\boldsymbol{y} = (y_i)_{1\leq i\leq n}$, on pose

$$d(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) = \#\{i \in [\![1; n]\!] \mid x_i \neq y_i\}$$

Montrer que l'on obtient ainsi une distance sur X (appelée distance de Hamming).

Exercice 5.— On rappelle que si (X, d) est un espace métrique, on note $B(x, r)$ une boule ouverte et $B_F(x, r)$ une boule fermée. Montrer que l'inclusion $\overline{B(x, r)} \subset B_F(x, r)$ est toujours vraie et donner un exemple où elle est stricte.

Exercice 6.— Dans le plan $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2, on considère le sous-espace métrique $Y = (]0, 1]^2, d_2)$.

1. Donner un exemple de boule de Y qui n'est pas une boule de X.

2. Donner un exemple de partie ouverte de Y qui n'est pas une partie ouverte de X.

3. On considère la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$ de Y. Est-elle convergente ? Justifier votre réponse par une preuve.

Exercice 7.— Dans le plan $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2, on considère le sous-espace métrique $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Déterminer et dessiner la boule $B((1, 0), 2)$ de Y.

Exercice 8.— Soient E et F deux parties d'un espace métrique (X, d).

1. Comparer $\mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(F)$ et $\mathrm{Adhe}(E \cap F)$.

2. Même question pour $\mathrm{Adhe}(E) \cup \mathrm{Adhe}(F)$ et $\mathrm{Adhe}(E \cup F)$.

3. Si A est ouvert, montrer que $A \cap \mathrm{Adhe}(B) \subset \mathrm{Adhe}(A \cap B)$. Qu'en est-il si A n'est pas ouvert ?

Exercice 9.— On définit une application $\delta :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ en posant

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Montrer que δ est une distance sur $]0,1[$ qui est topologiquement équivalente, mais pas équivalente, à la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 10.— Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ (on pourra donner plusieurs arguments).

Exercice 11.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert ;

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé ;

3. l'intérieur de l'image par Φ d'une partie A est égale à l'image de l'intérieur de A ;

4. l'adhérence de l'image de A est égale à l'image de l'adhérence de A ;

5. l'image d'une suite convergeant vers x est une suite convergeant vers $\Phi(x)$.

Exercice 12.— Soient X, Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(\mathrm{Inte}(A)) \subset \mathrm{Inte}(f^{-1}(A))$, pour toute partie $A \subset Y$.

2. Même question pour $\mathrm{Adhe}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Adhe}(A))$.

3. Soient $A, B \subset X$ tels que $\mathrm{Adhe}(A) = \mathrm{Adhe}(B)$. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Adhe}(f(A)) = \mathrm{Adhe}(f(B))$.

Exercice 13.—

1. Montrer que tous les segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (où $a < b$) sont homéomorphes.

2. Montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

Exercice 14.— On note A l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont exactement une des coordonnées est rationnelle. Cet ensemble est-il dense dans $\mathbb{R}^2$ si on munit le plan de la distance euclidienne usuelle ? Même question si on munit le plan de la distance discrète.

I.2 Exercices

Exercice 15.—

1. Soit O un ouvert du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{int}(\overline{O}) = O$?

2. Soient A, B deux parties du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{int}(A \cup B) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$?

3. Donner un exemple de partie A du plan qui est contenue strictement dans sa frontière.

4. Une partie du plan est-elle toujours ouverte ou fermée ?

5. Donner un exemple de partie X du plan contenant un point x avec la propriété suivante : dans le sous-espace métrique X, l'adhérence de la boule ouverte $B(x, 1)$ n'est pas la boule fermée $B_F(x, 1)$.

Exercice 16.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour toute partie A de X, on a

$$X \backslash \overline{A} = \mathrm{int}(X \backslash A) \quad \text{et} \quad X \backslash \mathrm{int}(A) = \overline{X \backslash A}$$

Exercice 17.— Soit (X, d) un espace métrique et Y un partie de X. On note d_Y la distance induite par d sur Y. Pour toute parie A de Y, on note respectivement $\mathrm{adh}_Y(A)$ et $\mathrm{int}_Y(A)$ l'adhérence et l'intérieur de A dans l'espace métrique (Y, d_Y). Montrer que l'on a

$$\mathrm{adh}_Y(A) = \mathrm{adh}(A) \cap Y \quad \text{et} \quad \mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}(A) \cap Y$$

Exercice 18.—(Parties denses) Soit (X, d) un espace métrique, et $D \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. D est dense dans X (i.e. $\mathrm{Adhe}(D) = X$).

2. L'unique fermé contenant D est X.

3. Le complémentaire de D dans X est d'intérieur vide.

4. Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap D \neq \emptyset$.

Exercice 19.— Donner un exemple d'une application continue $f : (X, d) \to (X', d')$ entre deux espaces métriques et d'une partie ouverte O de X telle que $f(O)$ n'est pas ouverte. Même question en remplaçant ≪ ouverte ≫ par ≪ fermée ≫.

Exercice 20.— Soit (X, d) un espace métrique. On définit une application $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ en posant

$$\delta(x, y) = \min(1, d(x, y)).$$

1. Montrer que δ est une distance, puis que cette distance est topologiquement équivalente à d.

2. Montrer que tout espace métrique est homéomorphe à un espace métrique borné.

Exercice 21.— **1.** Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on considère les ensembles $[0; 1]$, $[0; 1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}$? fermés dans $\mathbb{R}$? Déterminer leur adhérence dans $\mathbb{R}$.

2. On munit $\mathbb{R}^*$ de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. La partie $]0; 1]$ est-elle ouverte dans $\mathbb{R}^*$? est-elle fermée ?

Exercice 22.—

1. Montrer que les solutions du système d'inéquations $x + 2y > 0$ et $y^2 > x$ forment un ouvert du plan.

2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^N$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$. Que dire de l'intérieur de F ?

Exercice 23.— Dessiner et déterminer l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{t}{1+t} e^{it}, \ \ t \geq 0 \right\}.$$

Exercice 24.— (Continuité par morceaux) Soient (X, d) un espace métrique, et X_1, X_2 deux parties de X qui recouvrent X (c'est-à-dire que $X_1 \cup X_2 = X$). Soient (Y, d') un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ une application. On suppose que les restrictions $f_{|X_1} : X_1 \to Y$ et $f_{|X_2} : X_2 \to Y$ sont continues.

1. Montrer que si X_1 et X_2 sont fermés, alors f est continue.

2. Montrer que si X_1 et X_2 sont ouverts, alors f est continue.

3. Donner un exemple où f n'est pas continue.

Exercice 25.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ est fermée dans $(X, d) \times (X, d)$.

Exercice 26.— Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques.

1. Montrer que si $f : X \to X'$ est continue, alors le graphe de f est fermé dans $(X, d) \times (X', d')$.

2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en donnant un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue et dont le graphe est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 27.—

1. Dans un espace métrique (X, d), on considère une suite (x_n) qui converge vers un élément x et une suite (y_n) qui converge vers un élément y. Montrer que la suite des distances $(d(x_n, y_n))$ converge vers le nombre $d(x, y)$.

2. Interpréter le résultat comme une propriété de l'application distance.

Exercice 28.— On considère les points $p = (1, 0)$ et $q = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Dessiner les ensembles A_1, A_2, A_∞ où
$$A_i = \left\{ m \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|m - p\|_i = \|m - q\|_i \right\}.$$

Exercice 29.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. On se place dans l'espace $(\mathcal{B}([-1, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ des applications bornées. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Déterminer explicitement un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue.

Exercice 30.— Dans l'espace métrique $X = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, on considère la partie

$$X_0 = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \ \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée de X.

2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

3. En déduire que X_0 est d'intérieur vide.

4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé. Déterminer son intérieur.

Exercice 31.— On munit l'espace ℓ_∞ des suites réelles bornées de la distance d_∞. Montrer que l'ensemble des suites convergentes est une partie fermée de ℓ_∞.

Exercice 32.—(Valeurs d'adhérence)

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.

2. En utilisant la question précédente et l'exercice 17, montrer que l'ensemble $\{cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1;1]$.

Exercice 33.— On munit l'espace ℓ_∞ des suites réelles bornées de la distance d_∞ et on note X l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$.

1. Montrer que X est une partie fermée de ℓ_∞ et que d_∞ induit la distance discrète sur X.

2. On définit une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ en posant

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} 2^{-N(\mathbf{x},\mathbf{y})} \ \text{ si } \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0 \ \text{ si } \ \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

où

$$N(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf\{n \geq 0 \mid \ x_n \neq y_n\} \ \text{ si } \ \mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 0} \ \text{ et } \ \mathbf{y} = (y_n)_{n\geq 0}.$$

Montrer que d est une distance sur X.

3. Montrer qu'un point de X est ouvert dans (X, d_∞) mais n'est jamais ouvert dans (X, d).

4. Les deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 34.—(distance à un sous-ensemble)

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X,d) \to (X',d')$ est k-lipschitzienne si

$$\forall (x,y) \in X^2, d'(f(x), f(y)) \leq k d(x,y).$$

Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.

Soient (X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On pose $d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. Montrer que cette quantité est finie. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.

2. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).

3. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

4. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$.)

5. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x,y) : (x,y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

I.3 Compléments et défis

Espaces de matrices Soit n un entier positif. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$, ce qui en fait un espace métrique lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{n^2}$ de l'une des métriques habituelles. Par exemple, l'application

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$, et la métrique d_1 s'écrit

$$d_1(M, M') = \max\{|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|\}.$$

Exercice 35.— On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. On rappelle aussi que l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, par exemple $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'autre part une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M_0 une matrice quelconque. Rappeler pourquoi il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{R}$ qui annule l'expression $\det(M_0 + t\mathrm{Id})$. En déduire qu'on peut trouver une suite (t_n) de réels tendant vers 0 tels que, pour tout n, la matrice $M_0 + t_n\mathrm{Id}$ est inversible. Comment s'interprète ce résultat, en termes de propriété topologique de la partie $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Une application. On rappelle que le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est invariant par conjugaison : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\chi_M = \chi_{PMP^{-1}}$. On va montrer l'identité $\chi_{MN} = \chi_{NM}$ pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. On définit des fonctions $a_i : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en posant $\chi_M = \sum_{i=0}^{n} a_i(M)X^i$. Expliquer pourquoi chaque a_i est continue.

b. On fixe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{MN} = \chi_{NM}$ si M est inversible.

c. Utiliser la question 2 pour en déduire que l'identité est encore vraie lorsque M n'est pas inversible.

Exercice 36.— **1.** Soit $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer que c'est un ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Même question pour l'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que $MM^t = \mathrm{Id}$.

Exercice 37.— Soit α un irrationnel. Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $A = \{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, puis de l'ensemble $B = \{m + n\alpha \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$. *On pourra utiliser le fait suivant : il existe deux suites* $(p_n), (q_n) \in \mathbb{Z}^N$ *qui tendent vers* $+\infty$ *et telles que* $\lim_{n\to+\infty}(q_n\alpha - p_n) = 0$

Exercice 38.—(Deuxième théorème de Dini) Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers f. On suppose que f est continue. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 39.—(La distance de Hausdorff est une distance !) Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff définie par la formule

$$d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2, r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1, r)\}$$

où

$$V(E, r) = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < r\}$$

est le r-voisinage de E (voir le poly, section c des commentaires sur la complétude). On voudrait montrer que les axiomes de distances sont bien vérifiés. La symétrie est évidente...

1. Soient E_1, E_2 des fermés bornés non vides tels que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = 0$. Supposons qu'il existe un point x de E_1 qui n'est pas dans E_2. Construire une suite de points de E_2 qui converge vers x. Qu'en déduit-on ? Montrer que la distance de Hausdorff vérifie l'axiome de séparation.

2. On voudrait maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. On considère trois ensemble fermés bornés non vides E_1, E_2, E_3. On note $d_{12} = d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2)$, $d_{23} = d_{\text{Hausdorff}}(E_2, E_3)$, on se donne un $\varepsilon > 0$.

Soit x un point de E_1. Trouver un point z de E_3 tel que $d(x, z) < d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$. Qu'a-t-on montré, en termes de r-voisinages où $r = d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$? En déduire que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_3) \leq r$. Conclure.

Exercice 40.—[Une autre distance entre ensembles] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^n$ (en particulier, la mesure de Lebesgue est bien définie). Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$, on note $A\Delta B$ la différence symétrique entre A et B, définie par $A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. On note $\widetilde{\mathcal{B}}$ le quotient de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ par la relation d'équivalence $A \sim B$ si et seulement $A = B$ Lebesgue-presque partout (i.e. $Leb(A\Delta B) = 0$). Montrer que l'application

$$d : \begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}} \times \widetilde{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}_+ \\ (A, B) \mapsto Leb(A\Delta B) \end{cases}$$

est une distance sur $\widetilde{\mathcal{B}}$.

On dit que le couple $(E, ||.||)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si l'application $||.|| : E \to \mathbb{R}$ est une norme. C'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants :

1) Positive : $||.||$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
2) Positivement homogène : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$
3) Séparation : pour $x \in E$, si $||x|| = 0$, alors $x = 0$
4) Inégalité triangulaire : pour $x, y, z \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Exercice 41.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est égale à la boule fermée $B_F(a, r)$.

Exercice 42.— Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie $X \subset E$ est dite *convexe* si pour tous vecteurs $x, y \in X$ et tout $\lambda \in [0; 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$. Et une partie X est dite *symétrique* si pour tout vecteur $x \in X$, on a $-x \in X$.

1. Constater que la boule $B = \{x \in E \mid ||x|| < 1\}$ est convexe, ouverte, symétrique et contient 0.

2. Soit maintenant une partie $C \subset E$ ouverte et contenant 0. Pour tout $x \in E$, on note

$$I(x) = \{\alpha > 0 \mid x/\alpha \in C\}$$

Vérifier que l'application $p : E \to \mathbb{R}_+$ obtenue en posant $p(x) = \inf I(x)$ est bien définie.

3. On suppose de plus que C est symétrique. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

4. On suppose de plus que C est convexe. Montrer que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

5. Etablir l'égalité $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.

6. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $c_1 p(x) \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.

7. On suppose de plus que C est bornée.

- **a.** Montrer que $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **b.** Prouver l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que $||x|| \leq c_2 p(x)$ pour tout $x \in E$.

8. Montrer que p est l'unique norme sur E telle que $\{x \in E \mid p(x) < 1\} = C$.
