

DEVOIR MAISON 1 - À RENDRE POUR LE 6/10

Exercice 1.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour E une partie de X , les ensembles

$$\text{Inte}(E), \text{Fr}(E), \text{Inte}(X \setminus E)$$

forment une partition de X (ils sont deux à deux disjoints et leur union est égale à X).

Exercice 2.—

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ est k -lipschitzienne si $\forall (x, y) \in X^2, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Montrer qu'une fonction k -lipschitzienne est continue.
 2. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On pose $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Montrer que cela est fini. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.
 3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).
 4. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$.
 5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1} + d_{F_2}}$.)
 6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x, y) : (x, y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.
-

Exercice 3.— L'espace $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ est-il complet ?

Exercice 4.— Soit n un entier naturel non nul. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose strictement dilatante : pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Av\| \geq k\|v\|$$

où $k > 1$ est une constante, et $\|\cdot\|$ est la norme usuelle sur \mathbb{R}^n .

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que $\|A^{-1}\| < 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, c'est-à-dire

$$\|A^{-1}\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|A^{-1}v\|}{\|v\|}$$

3. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute application $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ε -lipschitzienne, l'application $A + \delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit un homéomorphisme.
-