Devoir Maison 1 - à rendre pour le 6/10

Exercice 1.— Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour E une partie de X, les ensembles

$$\mathrm{Inte}(E), \mathrm{Fr}(E), \mathrm{Inte}(X \backslash E)$$

forment une partition de X.

Exercice 2.—

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X, d) \to (X', d')$ est k-lipschitzienne si $\forall (x, y) \in X^2, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.
2. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On pose $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Montrer que cela est fini. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.
3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).
4. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1} + d_{F_2}}$.)
6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x, y) : (x, y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

Exercice 3.— L'espace $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ est-il complet ?

Exercice 4.— Soit n un entier naturel non nul. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose strcitement dilatante : pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$||Av|| \geq k||v||$$

où $k > 1$ est une constante, et $||.||$ est la norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que $|||A^{-1}||| < 1$, où $|||.|||$ est la norme subordonnée à $||.||$, c'est-à-dire

$$|||A^{-1}||| = \sup_{v \neq 0} \frac{||A^{-1}v||}{||v||}$$

3. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute application $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ε-lipschitzienne, l'application $A + \delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit un homéomorphisme.