

FEUILLE 4, EXERCICE 5 - CORRIGÉ

Exercice de calcul

Considérons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 3e^{xy} \sin(x^2 + y^2) \\ (x^2 + y^2) \cos(xy) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Justifier que f est différentiable et calculer sa jacobienne en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Correction : Notons $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les coordonnées de f , définies par

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3e^{xy} \sin(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \cos(xy) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

Ainsi, chaque coordonnée de l'application f est un produit de composées d'applications différentiables. Chaque coordonnée de f est donc une application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Donc f est une application différentiable.

Par conséquent, la jacobienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'exprime ainsi :

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Détaillons le calcul de $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)$. Pour $b \in \mathbb{R}$, posons

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_1(x, b) = 3e^{xb} \sin(x^2 + b^2) \end{cases}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_b(x) = 3be^{xb} \sin(x^2 + b^2) + 6e^{xb}x \cos(x^2 + b^2)$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = f'_y(x) = 3e^{xy} (y \sin(x^2 + y^2) + 2x \cos(x^2 + y^2))$$

En procédant de même pour les autres dérivées partielles, on obtient

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 3e^{xy} (y \sin(x^2 + y^2) + 2x \cos(x^2 + y^2)) & 3e^{xy} (x \sin(x^2 + y^2) + 2y \cos(x^2 + y^2)) \\ 2x \cos(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) \sin(xy) & 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Feuille 5) Exercice 5.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Donner les différentielles des fonctions $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\phi(x) = f(x, -x)$ et $\psi(x, y) = f(y, x)$.
 2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications différentiables. Calculer les dérivées partielles de la fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y, z) = f(g(y^2 + z), h(x + yz))$.
 3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications différentiables. Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = g(xy^2 f(x, y))$ est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.
-

Correction de la question 1 : On détaille le calcul pour ϕ , et on donne directement le résultat pour ψ .

Posons $A : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, -x) \end{cases}$ Alors $\phi = f \circ A$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} d_x \phi(h) &= (d_{A(x)} f) \circ (d_x A)(h) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(A(x)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A(x)) \right] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times h \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dit autrement, on a

$$\phi'(x) = d_x \phi(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) \in \mathbb{R}$$

En posant $B(x, y) = (y, x)$, puis en procédant de la même manière, on obtient

$$d_{(x,y)} \psi = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) \right] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Correction de la question 2 : On pourrait procéder comme dans la question 1, en posant

$$A(x, y, z) = (g(y^2 + z), h(x + yz))$$

On aurait alors $\phi = f \circ A$. Cela peut se réécrire différemment en posant

$$B(x, y, z) = (y^2 + z, x + yz) \quad \text{et} \quad C(x, y) = (g(x), h(y))$$

ce qui donne

$$\phi = f \circ A = f \circ C \circ B$$

et on pourrait faire les calculs de la même manière que dans la question 1, en utilisant

$$J_{(x,y,z)} \phi = J_{C \circ B(x,y,z)} f \times J_{B(x,y,z)} C \times J_{(x,y,z)} B$$

La seconde méthode se fait en utilisant la règle de la chaîne : pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiables, on a

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(g(x)) \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \right]_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} \in \mathbb{R}^p$$

Les calculs donnent alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(A(x, y, z)) \times h'(x + yz)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(A(x, y, z)) \times 2yg'(y^2 + z) + \frac{\partial f}{\partial y}(A(x, y, z)) \times zh'(x + yz)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(A(x, y, z)) \times g'(y^2 + z) + \frac{\partial f}{\partial y}(A(x, y, z)) \times yh'(x + yz)$$

Correction de la question 3 : L'application ϕ est différentiable par théorèmes généraux (c'est la composée de g , différentiable, par un produit d'applications différentiables, donc différentiable).

On donne directement la formule de la jacobienne de ϕ , qui peut se calculer en suivant les méthodes vues dans les questions 1 et 2 :

$$J_{(x,y)}\phi = g'(xy^2 f(x, y)) \left(y^2 f(x, y) + xy^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), 2xy f(x, y) + xy^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$$

Feuille 6) Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Montrer que :

- a. $f(x, y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| + |y|$ tend vers $+\infty$.
- b. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0\}$ est compact.
- c. f atteint son minimum sur \mathbb{R}^2 .

2. Calculer ce minimum.

Correction de la question 1.a. : (Rédaction partielle) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a toujours

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ce qui donne

$$f(x, y) \geq \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + \left(\frac{y^2}{2} + y \right)$$

Or $\frac{x^2}{2} - 2x \geq -2$ et $\frac{y^2}{2} + y \geq -\frac{1}{2}$, et on conclut car

$$|x| + |y| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow (x \rightarrow \pm\infty \text{ ou } y \rightarrow \pm\infty)$$

Correction de la question 1.b. : (Rédaction partielle) Notons $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0\}$. Puisque \mathbb{R}^2 est de dimension finie, il suffit de montrer que K est un fermé borné de \mathbb{R}^2 .

Fermé : image réciproque d'un fermé par une application continue

Borné : Par **1.a.**, on a

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists R \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x| + |y| \geq R \Rightarrow f(x, y) \geq M)$$

En prenant $M = 0$ et $R \geq 0$ associé, on peut montrer

$$K \subset B_{\|\cdot\|_1}((0, 0), R) \subset B_{\|\cdot\|_2}((0, 0), R)$$

(la dernière inclusion s'obtient en montrant $\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2$)

Correction de la question 1.c. : (Rédaction partielle) On commence par montrer $K \neq \emptyset$. Ainsi, l'application continue f atteint son minimum sur le compact K . On conclut en regardant les valeurs de f en dehors de K .

Correction de la question 2. : (Rédaction partielle) On a

$$\{(x, y) \text{ minimum global pour } f\} \subset \{(x, y) \text{ extremum local pour } f\} \subset \{(x, y) \text{ point critique pour } f\}$$

Or les points critiques de f sont les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $d_{(x,y)}f = 0$, et

$$d_{(x,y)}f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

En manipulant les équations, on obtient

$$d_{(x,y)}f = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 0$$

On a donc un seul point critique, et au moins un minimum global par **1.c.**. Donc $(1, 0)$ est le seul minimum global, et on a

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f(1, 0) = -1$$