Dernier DM - Corrigé

Exercice de calcul
Considérons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 3e^{xy}\sin(x^2+y^2) \\ (x^2+y^2)\cos(xy) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Justifier que f est différentiable et calculer sa jacobienne en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Correction : Notons $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les coordonnées de f, définies par

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 3e^{xy}\sin(x^2+y^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)\cos(xy) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

Ainsi, chaque coordonnée de l'application f est un produit de composées d'applications différentiables. Chaque coordonnée de f est donc une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. Donc f est une application différentiable.

Par conséquent, la jacobienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'exprime ainsi :

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Détaillons le calcul de $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$. Pour $b \in \mathbb{R}$, posons

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_1(x,b) = 3e^{xb}\sin(x^2+b^2) \end{cases}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_b'(x) = 3be^{xb}\sin(x^2+b^2) + 6e^{xb}x\cos(x^2+b^2)$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 3e^{xy}\left(y\sin(x^2+y^2) + 2x\cos(x^2+y^2)\right)$$

En procédant de même pour les autres dérivées partielles, on obtient

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 3e^{xy}\left(y\sin(x^2+y^2)+2x\cos(x^2+y^2)\right) & 3e^{xy}\left(x\sin(x^2+y^2)+2y\cos(x^2+y^2)\right) \\ 2x\cos(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)\sin(xy) & 2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy) \end{pmatrix}$$

Feuille 5) Exercice 5.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Donner les différentielles des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\phi(x) = f(x, -x)$ et $\psi(x, y) = f(y, x)$.

2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications différentiables. Calculer les dérivées partielles de la fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y, z) = f(g(y^2 + z), h(x + yz))$.

3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications différentiables. Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = g(xy^2 f(x, y))$ est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

Correction de la question 1 : On détaille le calcul pour ϕ, et on donne directement le résultat pour ψ.

Posons $A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, -x) \end{cases}$ Alors $\phi = f \circ A$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} d_x\phi(h) &= (d_{A(x)}f) \circ (d_xA)(h) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(A(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(A(x)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times h \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dit autrement, on a

$$\phi'(x) = d_x\phi(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) \in \mathbb{R}$$

En posant $B(x, y) = (y, x)$, puis en procédant de la même manière, on obtient

$$d_{(x,y)}\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) & \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Correction de la question 2 : On pourrait procéder comme dans la question 1, en posant

$$A(x, y, z) = (g(y^2 + z), h(x + yz))$$

On aurait alors $\phi = f \circ A$. Cela peut se réécrire différemment en posant

$$B(x, y, z) = (y^2 + z, x + yz) \quad \text{et} \quad C(x, y) = (g(x), h(y))$$

ce qui donne

$$\phi = f \circ A = f \circ C \circ B$$

et on pourrait faire les calculs de la même manière que dans la question 1, en utilisant

$$J_{(x,y,z)}\phi = J_{C \circ B(x,y,z)}f \times J_{B(x,y,z)}C \times J_{(x,y,z)}B$$

La seconde méthode se fait en utilisant la règle de la chaîne : pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ différentiables, on a

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(g(x)) \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \right]_{k \in [|1;p|]} \in \mathbb{R}^p$$

Les calculs donnent alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(A(x,y,z)) \times h'(x+yz)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(A(x,y,z)) \times 2yg'(y^2+z) + \frac{\partial f}{\partial y}(A(x,y,z)) \times zh'(x+yz)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(A(x,y,z)) \times g'(y^2+z) + \frac{\partial f}{\partial y}(A(x,y,z)) \times yh'(x+yz)$$

Correction de la question 3 : L'application ϕ est différentiable par théorèmes généraux (c'est la composée de g, différentiable, par un produit d'applications différentiables, donc différentiable).

On donne directement la formule de la jacobienne de ϕ, qui peut se calculer en suivant les méthodes vues dans les questions 1 et 2 :

$$J_{(x,y)}\phi = g'(xy^2 f(x,y)) \left(y^2 f(x,y) + xy^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), 2xyf(x,y) + xy^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$$

Feuille 6) Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.
1. Montrer que :
a. $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x|+|y|$ tend vers $+\infty$.
b. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$ est compact.
c. f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer ce minimum.

Correction de la question 1.a. : (Rédaction partielle) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a toujours

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

Ce qui donne

$$f(x,y) \geq \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + \left(\frac{y^2}{2} + y\right)$$

Or $\frac{x^2}{2} - 2x \geq -2$ et $\frac{y^2}{2} + y \geq -\frac{1}{2}$, et on conclut car

$$|x| + |y| \to +\infty \Leftrightarrow (x \to \pm\infty \text{ ou } y \to \pm\infty)$$

Correction de la question 1.b. : (Rédaction partielle) Notons $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, il suffit de montrer que K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Fermé : image réciproque d'un fermé par une application continue

Borné : Par **1.a.**, on a

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists R \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (|x| + |y| \geq R \Rightarrow f(x,y) \geq M)$$

En prenant $M = 0$ et $R \geq 0$ associé, on peut montrer

$$K \subset B_{||.||_1}((0,0), R) \subset B_{||.||_2}((0,0), R)$$

(la dernière inclusion s'obtient en montrant $||.||_1 \geq ||.||_2$)

Correction de la question 1.c. : (Rédaction partielle) On commence par montrer $K \neq \emptyset$. Ainsi, l'application continue f atteint son minimum sur le compact K. On conclut en regardant les valeurs de f en dehors de K.

Correction de la question 2. : (Rédaction partielle) On a

$$\{(x,y) \text{ minimum global pour } f\} \subset \{(x,y) \text{ extremum local pour } f\} \subset \{(x,y) \text{ point critique pour } f\}$$

Or les points critiques de f sont les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $d_{(x,y)}f = 0$, et

$$d_{(x,y)}f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

En manipulant les équations, on obtient

$$d_{(x,y)}f = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 0$$

On a donc un seul point critique, et au moins un minimum global par **1.c.**. Donc $(1,0)$ est le seul minimum global, et on a

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f(1,0) = -1$$