

Feuille d'exercices 5

1. Plus longue sous-suite croissante

Soient X_1, \dots, X_n des variables indépendantes à valeurs dans $[0, 1]$ et soit $L_n = L_n(X_1, \dots, X_n)$ la longueur de la plus longue sous-suite croissante, i.e.

$$L_n = \max \{k, \exists i_1 < \dots < i_k, X_{i_1} \leq \dots \leq X_{i_k}\}.$$

- (1) Pour $x \in [0, 1]^n$, on note $I(x)$ un ensemble d'indices qui réalise une plus longue sous-suite croissante dans x . Montrer que pour tout $y \in [0, 1]^n$,

$$L_n(x) \leq L_n(y) + \sum_{i \in I(x)} \mathbb{1}_{x_i \neq y_i}.$$

- (2) En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(L_n - \mathbf{E}L_n \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbf{E}L_n}\right),$$

et

$$\mathbf{P}(L_n - \mathbf{E}L_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right).$$

- (3) Pour les déviations à droite, on peut faire mieux.

- (a) En utilisant l'inégalité de transport conditionnelle de Marton, montrer, grâce à l'inégalité de la question (1), que pour toute loi $Q \ll P$,

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E}L_n \leq \sqrt{2\mathbf{D}(Q | P)\mathbf{E}_Q L_n},$$

où P correspond à la loi de $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- (b) En déduire que

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E}L_n \leq \sqrt{2\mathbf{D}(Q | P)\mathbf{E}L_n + 2\mathbf{D}(Q | P)}.$$

Pour cela, on pourra d'abord montrer que pour $x, y, a > 0$, si $y - a\sqrt{y} \leq x$ alors $y \leq x + a\sqrt{x} + a^2$.

- (c) En utilisant le Lemme de transport, montrer que cette inégalité implique que pour tout $\lambda \in [0, 1/2[$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(L_n - \mathbf{E}L_n)} \leq \frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{2(1 - 2\lambda)},$$

et donc que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(L_n - \mathbf{E}L_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\mathbf{E}L_n + 2t)}\right).$$