

Feuille d'exercices 3

1. Lien entre inégalité de Poincaré et inégalité de Sobolev logarithmique

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^n . On dit que μ satisfait une inégalité de Poincaré avec constante $c > 0$ si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans une classe de fonctions \mathcal{C} assez grande (disons ici, et dans toute cette feuille, que \mathcal{C} est la classe des fonctions \mathcal{C}^2 et à support compact), on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq c\mathcal{E}_\mu(f),$$

où $\mathcal{E}_\mu(f) = \mathbf{E}_\mu[\|\nabla f\|^2]$ est l'énergie de f sous μ . La constante de Poincaré de μ est définie comme

$$c_P(\mu) = \sup \left\{ \frac{\mathbf{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}_\mu(f)}, f \in \mathcal{C}, \mathbf{Var}_\mu(f) \neq 0 \right\}.$$

On dit que μ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique avec constante $c > 0$ si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans \mathcal{C} , on a

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq c\mathcal{E}_\mu(f),$$

La constante de Sobolev logarithmique de μ est définie comme

$$c_{LS}(\mu) = \sup \left\{ \frac{\mathbf{Ent}_\mu(f^2)}{\mathcal{E}_\mu(f)}, f \in \mathcal{C}, \mathbf{Var}_\mu(f) \neq 0 \right\}.$$

- (1) Montrer que $2c_P(\mu) \leq c_{LS}(\mu)$ (pour $f \in \mathcal{C}$, on pourra considérer la fonction $1 + \varepsilon f$, avec $\varepsilon > 0$).
- (2) On peut satisfaire une inégalité de Poincaré sans satisfaire une inégalité de Sobolev logarithmique. En effet, soit $\mu = \mathcal{E}(1)$ (loi exponentielle).
 - (a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq 4\mathbf{E}_\mu[f'^2].$$

- (b) Soit f donnée par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{ax}{2}}$ avec $0 < a < 1$. Montrer que pour toute constante $c > 0$, on peut trouver $a \in]0, 1[$ tel que $\mathbf{Ent}_\mu(f^2) > c\mathbf{E}_\mu[f'^2]$. (Certes, une telle fonction f n'appartient pas à la classe \mathcal{C} mais disons que cela fait l'affaire.)

2. Inégalité de Poincaré et de log-Sobolev pour la gaussienne

Le but de cet exercice est de montrer que si μ est la loi d'un vecteur gaussien standard sur \mathbb{R}^n , alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans la classe \mathcal{C} , on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \mathbf{E}_\mu[\|\nabla f\|^2] \quad \text{et} \quad \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq 2\mathbf{E}_\mu[\|\nabla f\|^2].$$

- (1) Montrer qu'il suffit d'établir ces résultats pour $n = 1$.
- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dans \mathcal{C} . Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables de Rademacher (uniformes sur $\{-1, 1\}$) indépendantes, et soit $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. On note g la fonction de $\{-1, 1\}^n$ dans \mathbb{R} telle que $g(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f(S_n)$. Montrer que

$$\mathcal{E}(g) \leq \mathbf{E} \left[f'(S_n)^2 + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}} |f'(S_n)| + \frac{\kappa^2}{n} \right],$$

où $\kappa = \sup |f''|$.

- (3) Conclure à l'aide de ce que l'on sait pour le cube $\{-1, 1\}^n$ et du théorème central limite.

3. Inégalité de Tsirelson-Ibragimov-Sudakov

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que si (X_1, \dots, X_n) est un vecteur gaussien standard sur \mathbb{R}^n et si $Z = f(X_1, \dots, X_n)$ avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction L -lipschitzienne ($L > 0$), alors pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(Z - \mathbf{E}Z \geq t) \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2L^2} \right\}.$$