

# Feuille d'exercices 1

## 1. Variance des statistiques d'ordre

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles i.i.d. On note  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  les statistiques d'ordre.

(1) À l'aide de l'inégalité d'Efron–Stein, montrer que pour tout  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$\mathbf{Var}(X_{(k)}) \leq k\mathbf{E}\left[\left(X_{(k)} - X_{(k+1)}\right)^2\right],$$

et que pour tout  $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$\mathbf{Var}(X_{(k)}) \leq (n-k+1)\mathbf{E}\left[\left(X_{(k)} - X_{(k-1)}\right)^2\right].$$

(2) Pour  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , comparer la vraie variance et la borne donnée par l'inégalité d'Efron–Stein (ordres de grandeur en fonction de  $n$  et  $k$ ). On pourra utiliser le fait que si  $(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Unif}([0, 1])^{\otimes n}$ , alors

$$(X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}, 1 - X_{(n)}) \sim \text{Dir}(1, \dots, 1),$$

la loi de Dirichlet à  $n + 1$  coordonnées de paramètre  $(1, \dots, 1)$ .

Pour la concentration des statistiques d'ordre, voir Boucheron et Thomas, *Concentration Inequalities for order statistics*, Electronic Communications in Probability (2012).

## 2. Une inégalité isopérimétrique

Pour  $A \subset \{0, 1\}^n$ , on note  $\mathbf{I}(A) = \mathbf{I}(\mathbb{1}_A)$ , l'influence totale de  $\mathbb{1}_A$  sous la loi  $\mu = \mathcal{B}(1/2)^{\otimes n}$ . Utiliser la sous-additivité de l'entropie pour montrer que

$$\mathbf{I}(A) \geq 2\mu(A) \log_2 \frac{1}{\mu(A)},$$

et montrer que l'égalité est atteinte pour les sous-cubes  $A = \{x \in \{0, 1\}^n, x_1 = \dots = x_k = 1\}$ .

## 3. Constante de Sobolev logarithmique pour la Bernoulli

L'inégalité de Sobolev logarithmique sur le cube  $\{0, 1\}^n$  énonce que pour toute fonction  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $p \in ]0, 1[$ , si  $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(p)^{\otimes n}$  et  $Z = f(X_1, \dots, X_n)$ , alors

$$\mathbf{Ent}(Z^2) \leq c(p)p(1-p) \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\left(Z - \bar{Z}^{(i)}\right)^2\right],$$

où  $\bar{Z}^{(i)} = f(X_1, \dots, X_{i-1}, 1 - X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$  et

$$c(p) = \begin{cases} 2 & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1-2p} \log\left(\frac{1-p}{p}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $p \neq \frac{1}{2}$ , cette borne est atteinte par la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum x_i}$ .

## 4. Inégalité de Sobolev logarithmique et concentration de la mesure

Soit  $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(1/2)^{\otimes n}$  et  $Z = f(X_1, \dots, X_n)$  avec  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $v > 0$  tel que pour tout  $x \in \{0, 1\}^n$ ,

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(f(x) - f(\bar{x}^{(i)})\right)^2 \leq v.$$

où  $\bar{x}^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . L'objectif de cet exercice est de montrer qu'alors, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbf{P}(Z - \mathbf{E}Z \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2v}\right).$$

(1) Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( e^{y/2} - e^{x/2} \right)^2 \leq \frac{(y-x)^2}{8} (e^x + e^y).$$

(2) À l'aide de l'inégalité de Sobolev logarithmique sur le cube, montrer que pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbf{Ent} \left( e^{\lambda Z} \right) \leq \frac{\lambda^2 v}{2} \mathbf{E} \left[ e^{\lambda Z} \right].$$

(3) En posant  $\psi(\lambda) = \log \mathbf{E} e^{\lambda(Z - \mathbf{E}Z)}$ , remarquer que l'inégalité ci-dessus équivaut à  $\lambda\psi'(\lambda) - \psi(\lambda) \leq \frac{\lambda^2 v}{2}$  et montrer qu'alors  $\psi(\lambda) \leq \frac{\lambda^2 v}{2}$ .

(4) Conclure en utilisant l'inégalité de Markov appliquée à la variable  $e^{\lambda Z}$  et en optimisant en  $\lambda \geq 0$ .