Inégalités de concentration
Sorbonne Université
2021-2022

Examen

Exercice 1

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi P à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{E}$. On pose

$$Z = \sup_{A \in \mathcal{A}} |P_n(A) - P(A)| \, ,$$

où $P_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \in A\}}$. Montrer que

$$\mathbf{Var}(Z) \le \frac{1}{4n} \cdot$$

Exercice 2

On rappelle le problème du *bin packing* : soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,1]$. On note $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ le nombre minimal de segments de longueur 1 permettant de ranger les nombres $X_1, \ldots, X_n$ (de telle sorte que la somme dans chaque segment ne dépasse pas 1).

(1) Soit $t \ge 0$. Que permet de dire l'inégalité de McDiarmid sur $\mathbf{P}(|Z - \mathbf{E}Z| \ge t)$?

(2) Soient $x, y \in [0,1]^n$. Montrer que

$$f(x) \le f(y) + 2 \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{y_i \ne x_i} + 1 \, .$$

(Indication : on pourra d'abord justifier que l'on peut toujours trouver une façon de ranger telle qu'au plus un segment est moins qu'à moitié rempli.)

(3) En utilisant l'inégalité conditionnelle de Marton, en déduire que pour toute loi Q absolument continue par rapport à P, la loi de $X = (X_1, \ldots, X_n)$, on a

$$\mathbf{E}f - \mathbf{E}_Q f \le 2\sqrt{2v\mathrm{D}(Q|P)} + 1 \, ,$$

où $v = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i^2]$.

(4) En déduire que pour tout $\lambda \ge 0$, on a

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(\mathbf{E}Z - Z)} \le 2v\lambda^2 + \lambda \, ,$$

puis que pour tout $t \ge 1$,

$$\mathbf{P}\left(Z - \mathbf{E}Z \le -t\right) \le \exp\left(-\frac{(t-1)^2}{8v}\right) \, .$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$, d'espérance $\mathbf{E}X = p \in]0,1[$. Le but de cette première partie est de démontrer l'amélioration suivante du lemme de Hoeffding : pour tout $\lambda \geq 0$, on a

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(X - \mathbf{E}X)} \leq \frac{\lambda^2 v_p}{2} ,$$

avec

$$v_p = \begin{cases} \frac{1-2p}{2\log\left(\frac{1-p}{p}\right)} & \text{si } 0 < p < \frac{1}{2} \ , \\ p(1-p) & \text{si } \frac{1}{2} \leq p < 1 \ . \end{cases}$$

(1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $X \sim \mathcal{B}(p)$, la loi de Bernoulli de paramètre p.

(2) Pour $q \in]p,1]$, on pose

$$g_p(q) = \frac{q \log \frac{q}{p} + (1-q)\log \frac{1-q}{1-p}}{(q-p)^2}$$

et l'on prolonge g_p par continuité en p en posant $g_p(p) = \frac{1}{2p(1-p)}$. Montrer que pour tout $q \in]p,1[$, on a

$$g_p'(q) = \frac{1}{(q-p)^2}\left(H\left(\frac{q-p}{1-p}\right) - H\left(\frac{q-p}{q}\right)\right) ,$$

où pour tout $u \in]0,1[$, $H(u) = \left(1 - \frac{2}{u}\right)\log(1-u)$.

(3) Montrer que H est strictement croissante sur $]0,1[$.

(4) En déduire que si $0 < p < \frac{1}{2}$, alors pour tout $q \in [p,1]$, on a $g_p(q) \geq \frac{\log\left(\frac{1-p}{p}\right)}{1-2p}$, et que si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors pour tout $q \in [p,1]$, on a $g_p(q) \geq \frac{1}{2p(1-p)}$.

(5) Conclure en utilisant la méthode de transport.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (ccordonnée par coordonnée), et $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ avec $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe un sous-ensemble croissant $A \subset \mathbb{R}^n$ et des constantes $v, C > 0$ tels que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, alors

$$\sum_{i=1}^n \left(f(x) - \inf_{x_i' \in \mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)\right)^2 \leq v ,$$

et si $x \notin A$, alors

$$\sum_{i=1}^n \left(f(x) - \inf_{x_i' \in \mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)\right)^2 \leq C .$$

On rappelle que $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit croissant si pour tout $x \in A$ et $y \geq x$ (coordonnée par coordonnée), on a $y \in A$.

Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbf{P}(Z - \mathbf{E}Z \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\left(v + C\mathbf{P}(X \notin A)\right)}\right) .$$

On pourra utiliser l'inégalité de Harris qui énonce que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions croissantes (en chacune de leurs coordonnées) et si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\mathbf{E}\left[f(X)g(X)\right] \geq \mathbf{E}\left[f(X)\right]\mathbf{E}\left[g(X)\right] .$$

Exercice 5

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(0,1)^{\otimes n}$ un vecteur gaussien standard et $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ une matrice symétrique réelle, non-nulle, et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 0$. On pose

$$Z = {}^t XAX = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} X_i X_j \, .$$

(1) On note $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ les valeurs propres (réelles) de A. Vérifier que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_1 > 0 \, .$$

(2) Montrer que Z a la même loi que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i (X_i^2 - 1) \, .$$

(3) Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors pour tout $\lambda \leq 0$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(Y^2-1)} \leq \lambda^2 \, ,$$

et que pour tout $\lambda \in [0, 1/2[$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(Y^2-1)} \leq \frac{\lambda^2}{1-2\lambda} \, .$$

(on pourra utiliser le fait que pour tout $u \in [0,1[$, $-\log(1-u) - u \leq \frac{u^2}{2(1-u)}$).

(4) En déduire que pour tout $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2\mu_1}\right[$, on a

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda Z} \leq \frac{\lambda^2 \|A\|_{\text{HS}}^2}{1 - 2\mu_1 \lambda} \, ,$$

où $\|A\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$ est la norme d'Hilbert-Schmidt de A.