Feuille d'exercices 5

1. Plus longue sous-suite croissante

(1) Soit $x \in [0,1]^n$. Notons $I(x)$ un ensemble d'indices qui réalise une plus longue sous-suite croissante dans x et, pour $y \in [0,1]^n$, notons $J(x,y) = \{i \in I(x), x_i \neq y_i\}$. Comme $I(x) \setminus J(x,y)$ est un ensemble d'indices qui réalise une sous-suite croissante dans y, on a $L_n(y) \geq |I(x) \setminus J(x,y)|$. Ainsi

$$L_n(x) = |I(x)| = |I(x) \setminus J(x,y)| + |J(x,y)| \leq L_n(y) + \sum_{i \in I(x)} \mathbb{1}_{x_i \neq y_i} .$$

(2) En appliquant la Proposition 5.6 des notes de cours à la fonction $-L_n$ avec $c_i(x) = \mathbb{1}_{i \in I(x)}$, et en remarquant que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E} c_i(X)^2 = \mathbf{E} L_n(X) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in [0,1]^n} \sum_{i=1}^n c_i(x)^2 \leq n ,$$

on obtient bien les deux inégalités demandées.

(3) (a) Soit $Q \ll P$. Par la question (1), on a, pour tout couplage (X,Y) de (P,Q), et en notant $c_i(Y) = \mathbb{1}_{i \in I(Y)}$,

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E} L_n = \mathbf{E} L_n(Y) - \mathbf{E} L_n(X) \leq \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n c_i(Y) \mathbf{P}(X_i \neq Y_i \mid Y)\right] .$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbf{E} L_n(Y) - \mathbf{E} L_n(X) \leq \sqrt{\mathbf{E} L_n(Y)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\mathbf{P}(X_i \neq Y_i \mid Y)^2\right]\right)^{1/2} .$$

Et l'inégalité de Marton conditionnelle donne l'existence d'un couplage (X,Y) tel que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[\mathbf{P}(X_i \neq Y_i \mid Y)^2\right] \leq 2\mathrm{D}(Q \mid P) .$$

On obtient donc bien

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E} L_n \leq \sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P) \mathbf{E}_Q L_n} .$$

(b) Soient $x, y > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Supposons $y - a\sqrt{y} \leq x$. Alors $\left(\sqrt{y} - \frac{a}{2}\right)^2 \leq x + \frac{a^2}{4}$, ce qui implique $\sqrt{y} \leq \frac{a}{2} + \sqrt{x + \frac{a^2}{4}}$, et en élevant au carré (le terme de droite est toujours positif), $y \leq \frac{a^2}{2} + x + a\sqrt{x + \frac{a^2}{4}}$. Il suffit alors de montrer que

$$\frac{a^2}{2} + x + a\sqrt{x + \frac{a^2}{4}} \leq x + a^2 + a\sqrt{x} ,$$

soit

$$\frac{a^2}{2} - a\left(\sqrt{x + \frac{a^2}{4}} - \sqrt{x}\right) \geq 0 .$$

Si $a < 0$, c'est clair. Si $a \geq 0$, c'est vrai aussi car $\sqrt{x + \frac{a^2}{4}} \leq \sqrt{x} + \frac{a}{2}$.

En appliquant cette inégalité avec $y = \mathbf{E}_Q L_n$, $x = \mathbf{E} L_n$ et $a = \sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P)}$, on obtient

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E} L_n \leq \sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P) \mathbf{E} L_n} + 2\mathrm{D}(Q \mid P) .$$

(c) Par le Lemme de transport, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(L_n - \mathbf{E}L_n)} = \sup_{Q \ll P} \left\{ \lambda(\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E}L_n) - \mathrm{D}(Q \mid P) \right\} .$$

Ainsi

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(L_n - \mathbf{E}L_n)} \leq \sup_{Q \ll P} \left\{ \lambda \left(\sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P)\mathbf{E}L_n} + 2\mathrm{D}(Q \mid P) \right) - \mathrm{D}(Q \mid P) \right\} .$$

Or pour $\lambda \in [0, 1/2[$, la fonction

$$\begin{aligned} g \, : \, \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \left(\sqrt{2x\mathbf{E}L_n} + 2x \right) - x \end{aligned}$$

est maximale en $x = \frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{2(1-2\lambda)^2}$ et vaut en ce point

$$\frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{1 - 2\lambda} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{(1 - 2\lambda)^2} = \frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{2(1 - 2\lambda)} .$$

Ainsi

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(L_n - \mathbf{E}L_n)} \leq \frac{\lambda^2 \mathbf{E}L_n}{2(1 - 2\lambda)} .$$

La variable L_n est donc sous-Gamma à droite avec facteur variance $\mathbf{E}L_n$ et facteur d'échelle 2. Cela implique que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(L_n - \mathbf{E}L_n \geq t \right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\mathbf{E}L_n + 2t)} \right) .$$