Feuille d'exercices 4

1. Nombre chromatique d'un graphe aléatoire

La quantité $\chi(G)$ est une fonction des $\binom{n}{2}$ variables de Bernoulli $(B_{i,j})_{i>j}$ indépendantes indiquant la présence ou non d'une arête entre deux sommets distincts. Cependant, si l'on applique directement l'inégalité des différences bornées en remarquant que changer l'indicatrice d'une arête ne peut faire varier le nombre chromatique que de 1, on obtient une inégalité sous-gaussienne avec facteur variance d'ordre n^2. Pour obtenir le facteur n, on va plutôt voir $\chi(G)$ comme une fonction de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ où

$$X_k = (B_{k,k+1}, \ldots, B_{k,n}) .$$

Autrement dit, X_k nous indique les arêtes entre k et les sommets d'indice plus grand que k. Clairement les variables (X_k) sont indépendantes, et l'on remarque que même si l'on rejoue toutes les arêtes adjacentes à un même sommet, le nombre chromatique ne peut pas varier de plus de 1. Ainsi l'inégalité des différences bornées donne bien le résultat voulu.

2. Entropie de Vapnik–Chervonenkis

(1) Notons que l'on peut étendre de façon naturelle la fonction h sur $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{X}^n$, l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{X}$. Remarquons qu'alors

$$0 \leq h(x) - h(x^{(i)}) \leq 1 .$$

En effet, soit il existe $j \neq i$ tel que $x_j = x_i$ et c'est clair ($h(x) = h(x^{(i)})$). Soit, on peut écrire

$$|\mathsf{tr}(x)| = \sum_{B \in \mathsf{tr}(x^{(i)})} 2^{\mathbb{1}_{B\in \mathsf{tr}(x), B\cup\{x_i\}\in \mathsf{tr}(x)}} .$$

Ainsi $|\mathsf{tr}(x)| \geq |\mathsf{tr}(x^{(i)})|$ et $\frac{|\mathsf{tr}(x)|}{|\mathsf{tr}(x^{(i)})|} \leq 2$, d'où $h(x) - h(x^{(i)}) \leq 1$. Montrons maintenant que

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(h(x) - h(x^{(i)}) \Big) \leq h(x) .$$

Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \{0,1\}^n$ un vecteur de loi uniforme sur $\mathsf{tr}(x)$ (où l'on identifie $y \in \{0,1\}^n$ avec le sous-ensemble des x_i tels que $y_i = 1$). On a alors

$$h(x) = \frac{1}{\log(2)} H(Y) ,$$

où $H(Y)$ est l'entropie de Shannon du vecteur Y. Par l'inégalité de Han, on a

$$H(Y) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} H(Y^{(i)}) ,$$

où $Y^{(i)} = (Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_n)$. Or, comme la distribution uniforme maximise l'entropie,

$$H(Y^{(i)}) \leq \log \big|\mathsf{tr}\big(x^{(i)}\big)\big| = \log(2) h\big(x^{(i)}\big) .$$

Ainsi,

$$h(x) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} h\big(x^{(i)}\big) ,$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

(2) Par la Proposition 4.11 des notes, on a que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(Z - \mathbf{E}Z)} \leq (e^{\lambda} - \lambda - 1)\mathbf{E}Z .$$

Autrement dit, Z est sous-Poisson.

(3) L'inégalité $\mathbf{E}\left[\log_2 |\mathsf{tr}(X)|\right] \leq \log_2 \mathbf{E}|\mathsf{tr}(X)|$ vient juste de l'inégalité de Jensen. Pour l'autre inégalité, on applique l'inégalité de la question précédente à $\lambda = \log(2)$. Cela donne

$$\log \mathbf{E}\left[|\mathsf{tr}(X)|\right] - \mathbf{E}\left[\log |\mathsf{tr}(X)|\right] \leq (1 - \log(2))\, \mathbf{E}\left[\log_2 |\mathsf{tr}(X)|\right] ,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité désirée.

3. Fonctions faiblement (a, b)-auto-bornées

C'est le Théorème 6.19 dans *Concentration Inequalities* de Boucheron, Lugosi, et Massart.