Feuille d'exercices 3

1. Lien entre inégalité de Poincaré et inégalité de Sobolev logarithmique

(1) Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de $c_{\mathrm{LS}}(\mu)$, on a

$$\mathbf{Ent}_\mu \left((1+\varepsilon f)^2\right) \leq c_{\mathrm{LS}}(\mu)\mathcal{E}_\mu(1+\varepsilon f)\,.$$

Remarquons déjà que $\mathcal{E}_\mu(1+\varepsilon f) = \varepsilon^2\mathcal{E}_\mu(f)$. D'autre part, en faisant un développement limité du log à l'ordre 2, et en utilisant le fait que f est bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu\left[(1+\varepsilon f)^2\log(1+\varepsilon f)^2\right] &= 2\mathbf{E}_\mu\left[(1+2\varepsilon f+\varepsilon^2 f^2)(\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2 f^2}{2} + O(\varepsilon^3)\right] \\ &= 2\varepsilon\mathbf{E}_\mu f + 3\varepsilon^2\mathbf{E}_\mu f^2 + O(\varepsilon^3)\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu[(1+\varepsilon f)^2]\log\mathbf{E}_\mu[(1+\varepsilon f)^2] &= \left(1+2\varepsilon\mathbf{E}_\mu f+\varepsilon^2\mathbf{E}_\mu f^2\right)\left(2\varepsilon\mathbf{E}_\mu f+\varepsilon^2\mathbf{E}_\mu f^2 - 2\varepsilon^2(\mathbf{E}_\mu f)^2 + O(\varepsilon^2)\right) \\ &= 2\varepsilon\mathbf{E}_\mu f + 2\varepsilon^2(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \varepsilon^2\mathbf{E}_\mu f^2\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{Ent}_\mu\left((1+\varepsilon f)^2\right) = 2\varepsilon^2\,\mathbf{Var}_\mu(f) + O(\varepsilon^2)\,.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$2\,\mathbf{Var}_\mu(f) \leq c_{\mathrm{LS}}(\mu)\mathcal{E}_\mu(f)\,.$$

Donc $2c_{\mathrm{P}}(\mu) \leq c_{\mathrm{LS}}(\mu)$.

(2) (a) Soit $f \in \mathcal{C}$. Sans perte de généralité, supposons $f(0) = 0$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu[f^2] &= \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x}dx \\ &= \left[-f^2(x)e^{-x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} f'(x)f(x)e^{-x}dx \\ &= 2\mathbf{E}_\mu\left[f'f\right]\,.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbf{E}_\mu\left[f'f\right] \leq \left(\mathbf{E}_\mu[f'^2]\mathbf{E}_\mu[f^2]\right)^{1/2}\,.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}_\mu[f^2] \leq 4\mathbf{E}_\mu[f'^2]\,,$$

et comme $\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \mathbf{E}_\mu[f^2]$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

(b) Soit f donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{ax}{2}}$, pour $0 < a < 1$. On a

$$\mathbf{E}_\mu[f^2] = \int_0^{+\infty} e^{-(1-a)x}dx = \frac{1}{1-a}\,,$$

et

$$\mathbf{E}_\mu[f^2\log(f^2)] = \int_0^{+\infty} axe^{-(1-a)x}dx = \frac{a}{(1-a)^2}\,.$$

Ainsi,

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \frac{a+(1-a)\log(1-a)}{(1-a)^2}\,.$$

D'autre part,

$$\mathbf{E}_\mu[f'^2] = \frac{a^2}{4(1-a)}\,.$$

En faisant tendre a vers 1, on voit que $\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \sim \frac{1}{(1-a)^2}$ alors que $\mathbf{E}_\mu[f'^2] \sim \frac{1}{4(1-a)}$. On ne pourra donc pas trouver de constante c telle que l'inégalité de Sobolev logarithmique soit vérifiée.

2. Poincaré et log-Sobolev pour la gaussienne

(1) Pour Poincaré, c'est grâce à Efron-Stein. Et pour Sobolev, c'est grâce à la sous-additivité de l'entropie.

(2) On a

$$\mathcal{E}(g) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left(f(S_n) - f(S_n - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}})\right)^2\right].$$

Par la formule de Taylor, il existe θ entre S_n et $S_n - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}}$ tel que

$$f(S_n - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}}) = f(S_n) - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}} f'(S_n) + \frac{2\varepsilon_i^2}{n} f''(\theta).$$

Ainsi

$$\left| f(S_n) - f(S_n - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}}) \right| \le \frac{2}{\sqrt{n}}|f'(S_n)| + \frac{2}{n}\kappa,$$

et

$$\left(f(S_n) - f(S_n - \frac{2\varepsilon_i}{\sqrt{n}})\right)^2 \le \frac{4}{n}f'(S_n)^2 + \frac{8\kappa}{n^{3/2}}|f'(S_n)| + \frac{4\kappa^2}{n^2}.$$

On a donc bien

$$\mathcal{E}(g) \le \mathbf{E}\left[f'(S_n)^2 + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}}|f'(S_n)| + \frac{\kappa^2}{n}\right].$$

(3) Par l'inégalité de Poincaré et de Sobolev logarithmique sur le cube $\{-1,1\}^n$ muni de la mesure uniforme, on sait que

$$\mathbf{Var}(g) \le \mathcal{E}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Ent}(g^2) \le 2\mathcal{E}(g).$$

Or, par le TCL, S_n converge en loi vers $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\mathbf{Var}\, f(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{Var}\, f(X), \qquad \mathbf{Ent}\, f^2(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{Ent}\, f^2(X),$$

et

$$\mathbf{E}\left[f'(S_n)^2 + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}}|f'(S_n)| + \frac{\kappa^2}{n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\left[f'(X)^2\right].$$

4. Inégalité de Tsirelson-Ibragimov-Sudakov

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur gaussien standard sur $\mathbb{R}^n$ et $Z = f(X_1,\dots,X_n)$ avec $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne ($L>0$). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure gaussienne montrée à l'exercice précédent, appliquée à la fonction $e^{\frac{\lambda f}{2}}$, ona

$$\mathbf{Ent}\left[e^{\lambda Z}\right] \le 2\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{2}(\partial_i f)e^{\frac{\lambda Z}{2}}\right)^2\right] = \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[(\partial_i f)^2 e^{\lambda Z}\right].$$

Comme f est L-lipschitzienne, on a $\|\nabla f\|^2 \le L^2$ et

$$\mathbf{Ent}\left[e^{\lambda Z}\right] \le \frac{\lambda^2 L^2}{2}\mathbf{E}\left[e^{\lambda Z}\right].$$

On conclut comme à la fin de l'exercice 4 de la Feuille 1 (argument de Herbst).