Feuille d'exercices 2

1. Variables sous-Gamma

(1) Soit g la fonction définie par : $\forall \lambda \in [0, 1/c[$, $g(\lambda) = \lambda t - \frac{v\lambda^2}{2(1-c\lambda)}$. Pour tout $\lambda \in [0, 1/c[$, on a

$$g'(\lambda) = t - \frac{v}{2} \cdot \frac{2\lambda(1-c\lambda) + c\lambda^2}{(1-c\lambda)^2} \cdot$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow 2t(1-c\lambda)^2 = v(2\lambda - c\lambda^2) \\ &\Leftrightarrow (vc + 2tc^2)\lambda^2 - 2(v+2ct)\lambda + 2t = 0 \\ &\Leftrightarrow c\lambda^2 - 2\lambda + \frac{2t}{v+2ct} = 0\,. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 4\left(1 - \frac{2ct}{v+2ct}\right)$. En notant pour alléger les notations, $x = \frac{ct}{v}$, on a $\Delta = \frac{4}{1+2x}$ et les deux racines sont données par

$$\lambda_- = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{c} \qquad \text{et} \qquad \lambda_+ = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{c}\,.$$

Seule λ_- appartient à $[0, 1/c[$ et l'on a

$$\lambda_t = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)\,.$$

(2) En gardant la notation $x = \frac{ct}{v}$, on a

$$\begin{aligned} t\lambda_t - \frac{v\lambda_t^2}{2(1-c\lambda_t)} &= \frac{t}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right) - \frac{\frac{v}{c^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)^2}{2\frac{1}{\sqrt{1+2x}}} \\ &= \frac{v}{c^2}\left(x - \frac{x}{\sqrt{1+2x}} - \frac{\sqrt{1+2x}}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{1+2x}\right)\right) \\ &= \frac{v}{c^2}\left(1 + x - \sqrt{1+2x}\right)\,. \end{aligned}$$

(3) Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g(x) \geq \frac{x^2}{2(1+x)} &\Leftrightarrow \sqrt{1+2x} \leq 1 + x - \frac{x^2}{2(1+x)} \\ &\Leftrightarrow 1 + 2x \leq (1+x)^2 + \frac{x^4}{4(1+x)^2} - x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^4}{4(1+x)^2}\,. \end{aligned}$$

(4) Par la méthode de Cramér–Chernoff et ce qui précède, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z - \mathbf{E}Z \geq t\right) &\leq \exp\left(-\sup_{\lambda \in [0,1/c[}\left\{\lambda t - \log \mathbf{E} e^{\lambda(Z - \mathbf{E}Z)}\right\}\right) \\ &\leq \exp\left(-\sup_{\lambda \in [0,1/c[}\left\{\lambda t - \frac{v\lambda^2}{2(1-c\lambda)}\right\}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{v}{c^2} g\left(\frac{ct}{v}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{v}{c^2}\frac{\left(\frac{ct}{v}\right)^2}{2\left(1 + \frac{ct}{v}\right)}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2(v+ct)}\right\}\,. \end{aligned}$$

2. Maximum de variables aléatoires

(1) (a) Par l'inégalité de Jensen et le fait que le maximum de variables positives est inférieur à leur somme, on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$e^{\lambda \mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right]} \leq \mathbf{E}\left[e^{\lambda \max_{1\leq i\leq n} X_i}\right] = \mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} e^{\lambda X_i}\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{\lambda X_i}\right] \leq n e^{\frac{\lambda^2 v}{2}}.$$

(b) Par la question précédente, on a pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \leq \frac{\log n}{\lambda} + \frac{\lambda v}{2}\cdot$$

En choisissant λ qui égalise les deux termes, soit $\lambda = \sqrt{\frac{2\log n}{v}}$, on a

$$\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \leq \sqrt{2v\log n}\,.$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} 1 - (1-e^{-\theta t})^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u \qquad (u = 1-e^{-\theta t}) \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} u^i \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\theta}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \sim \frac{\log n}{\theta}\cdot
\end{aligned}$$

(3) (a) Par la même astuce qu'en question (1), on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$e^{\lambda \mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right]} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{\lambda X_i}\right] = n e^{e^{\lambda}-1},$$

soit

$$\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \leq \frac{\log n}{\lambda} + \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}.$$

En choisissant λ qui égalise les deux termes, soit $\lambda = \log(1+\log n)$, on obtient

$$\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \leq \frac{2\log n}{\log(1+\log n)} \leq \frac{2\log n}{\log\log n}\cdot$$

(b) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \geq a\mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \geq a\right) = a\left(1 - \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i < a\right)\right).$$

Or, par indépendance,

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i < a\right) = \mathbf{P}(X_1 < a)^n = (1-\mathbf{P}(X_1 \geq a))^n \leq (1-\mathbf{P}(X_1 = a))^n.$$

Pour $a = \left\lfloor \frac{\log n}{\log\log n} \right\rfloor$, on a

$$\mathbf{P}(X_1 = a) = \frac{e^{-1}}{a!} \geq \frac{e^{-1}}{a^a} \geq \frac{e^{-1}}{n}\cdot$$

Ainsi $(1-\mathbf{P}(X_1 = a))^n \leq e^{-e^{-1}}$, et $\mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \geq \left(1 - e^{-e^{-1}}\right) a$.

3. Plus grande valeur propre d'un graphe aléatoire

(1) En choisissant $u = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a

$$ {}^t uAu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \deg(i)\,, $$

où $\deg(i)$ est le degré de i dans G, soit le nombre d'arêtes adjacentes à i. Or pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{E} \deg(i) = (n-1)p$, ce qui donne bien la minoration $\mathbf{E}\lambda_1(A) \geq (n-1)p$.

(2) En remarquant que la matrice $A - A^{(i,j)}$ est nulle sauf éventuellement en (i,j) et (j,i) où elle vaut soit 1 soit -1, on a

$$ \begin{aligned} \left(\lambda_1(A) - \lambda_1(A^{(i,j)})\right)_+ &\leq \left({}^t vAv - {}^t vA^{(i,j)}v\right)_+ \\ &= \left({}^t v(A - A^{(i,j)})v\right)_+ \\ &\leq 2|v_i v_j|\,. \end{aligned} $$

(3) Par l'inégalité d'Efron–Stein, on a

$$ \mathbf{Var}(\lambda_1(A)) \leq \sum_{i<j} \mathbf{E}\left[\left(\lambda_1(A) - \lambda_1(A^{(i,j)})\right)_+^2\right] \leq 4 \sum_{i<j} |v_i v_j|^2 \leq 2 \sum_{i,j} |v_i v_j|^2 = 2\|v\|^4 = 2\,. $$