MASTER 2
spécialité :
”Probabilités et Modèles Aléatoires”

Sorbonne Université

Brochure 2023–2024

Nouveaux cours optionnels

20/05/2023

OBJECTIFS

L'objectif de la spécialité "PROBABILITÉS ET MODELES ALEATOIRES" de la seconde année du Master de Sorbone Université, est de délivrer une formation de haut niveau en probabilités théoriques et appliquées.

En 2023–2024, nous proposons **deux orientations** aux étudiants en fonction des cours suivis et du sujet de mémoire ou de stage choisi : l'une plus centrée sur la

– *Théorie des Processus Stochastiques*,

l'autre sur les

– *Probabilités Appliquées.*

La première orientation prépare les étudiants à une carrière de chercheur (ou enseignant-chercheur) en milieu académique, l'autre à une carrière en milieu industriel, en passant par des stages et des thèses CIFRE.

CO-HABILITATIONS

Le master est co-habilité avec l'Ecole Normale Supérieure de Paris et avec l'Ecole des Ponts ParisTech.

CRITÈRES DE SÉLÉCTION

Le principal critère de sélection est un prérequis solide en mathématiques générales, et en particulier en théorie de la mesure et de l'intégration, en calcul des probabilités.

Cette spécialité s'adresse aux étudiants provenant du Master 1 de mathématiques et aux titulaires d'un Master 1 ou d'une maîtrise de *Mathématiques*, de *Mathématiques Appliquées*, ou d'*Ingénierie Mathématique*. Elle est également ouverte aux titulaires d'une maîtrise M.A.S.S., ou d'un diplôme d'ingénieur (ou éventuellement de deux ans d'études dans une école d'ingénieurs), **sous réserve d'une formation suffisante en mathématiques, et notamment en probabilités**.

PREREQUIS POUR LES ETUDIANTS DE SORBONNE UNIVERSITE

Pour les étudiants de Sorbonne Université il est *indispensable* d'avoir validé avec de bonnes notes

• Le cours "Mesure et Intégration" en L3

et

• Le cours "Probabilités II" (3M290) au second semestre de L3 et le cours "Probabilités Approfondies" (4M011) au premier semestre de M1.

Il est possible d'être admis à titre exceptionnel après avoir validé

• le cours "Probabilités de Base" (4M010) au premier semestre de M1 et le cours "Processus de sauts" (4M036) au second semestre de M1. Cette admission se fait d'après les recommandations personnelles des professeurs de ces cours et/ou des chargés de TD.

Il est *indispensable* d'avoir validé avec de bonnes notes d'autres modules de mathématiques pour avoir une culture large et solide.

Il est souhaitable d'avoir validé un cours de statistiques mathématiques.

Le cours "Programmation en C et C++" est très souhaitable pour ceux qui s'orienteront vers des stages, des thèses CIFRE, et une carrière en entreprise.

Par contre, d'autres cours en probabilités ne sont pas indispensables.

TÉLÉ-ENSEIGNEMENT

Les étudiants salariés peuvent préparer le Master 2 **"Probabilités et Modèles Aléatoires"** en télé-enseignement. Pour cela, vous devez vous connecter sur le site du télé-enseignement afin de pouvoir télécharger la fiche correspondante.

La liste de cours proposés en télé-enseignement est donnée dans la brochure de cette année, elle est restreinte par rapport à la liste de cours en enseignement en présentiel.

Les critères de sélection sont *les mêmes* qu'en enseignement en présentiel.

DÉBOUCHÉS

La vocation principale de la spécialité est de former de futurs chercheurs en calcul de probabilités. Pour cette raison, la majorité des étudiants qui réussissent cette spécialité s'orientent ensuite vers le **Doctorat**, troisième composante du LMD en préparant une thèse.

La thèse peut être préparée après l'obtention du Master en s'inscrivant en Doctorat pour une durée de 2 à 4 ans en principe. Cette inscription est subordonnée à l'acceptation de l'étudiant par un " directeur de thèse".

Des allocations de recherche sont attribuées aux étudiants en thèse, sur critères *pédagogiques.*

Plusieurs étudiants préparent une thèse au sein du *Laboratoire de Probabilités Statistiques et Modélisation,* voir le site: http://www.proba.jussieu.fr Ce laboratoire des Sorbonne Université et Université et Denis Diderot, associé au C.N.R.S., assure la maîtrise d'oeuvre de la spécialité. Il est l'un des centres de recherche les plus actifs dans le monde dans le domaine des probabilités et des processus stochastiques. Le laboratoire regroupe environ 60 enseignants et chercheurs, sans compter les nombreux étudiants en thèse.

Les étudiants peuvent aussi préparer une thèse au sein d'autres laboratoires de recherche (universitaires ou de grandes écoles) ainsi que dans des instituts de recherche (l'INRIA, l'INRA, et autres) en France et à l'étranger.

Les étudiants qui ont choisi l'orientation "Probabilités Appliquées" le font en entreprise sous la forme de contrats CIFRE (ORANGE, EDF, CEA, AREVA, SAFRAN, SCHLUMBERGER,...).

Cette formation fournit aussi des débouchés professionnels immédiats dans des entreprises, notamment dans des banques, des sociétés d'assurance, ou des organismes financiers.

Finalement, ce master constitue un atout de carrière pour les enseignants de mathématiques agrégés dans des lycées et des classes préparatoires.

ORGANISATION DE L'ANNÉE : Cours, stage, mémoire

Premier semestre (30ECTS) (Septembre-Janvier) L'année commence par *deux cours intensifs de prérentrée* en Probabilités et en Statistiques en septembre : son objectif est de faire un point sur les connaissances en probabilités acquises en M1 qui seront constamment utilisées en M2. Ces cours durent deux semaines et ne donnent pas lieu à un examen.

Au **premier semestre** les étudiants qui ont choisi l'orientation "*Processus stochastiques*" suivent les cours

- "Processus de Markov et Applications" (9ECTS)
- "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions"(9ECTS)
- "Convergence de Processus, Grandes Déviations, Percolation" (6ECTS)
- et un cours au choix parmi deux cours "Nuages Poissioniens, Processus de Levy et Excursions"(6 ECTS), ou "Statistique et Apprentissage"(6 ECTS).

Au **premier semestre** les étudiants qui ont choisi l'orientation "*Probabilités Appliquées*" suivent les cours

- "Modèles Markoviens sur des espaces discrets" (6ECTS),
- "Calcul Stochastique et Processus de Diffusions"(9ECTS),
- "Probabilités numériques et Méthodes de Monte Carlo" (9ECTS),
- "Statistique et Apprentissage"(6 ECTS).

Deuxième semestre (30 ECTS) (Février-Juin). Les étudiants ont le choix parmi les cours spécialisés :

- "Probabilités, Algèbre et Théorie Ergodique"(6ECTS)
- "Probabilités et Physique"(6ECTS)
- "Probabilités, Méthodes Numériques, Algorithmes "(6ECTS)
- "Processus Stochastiques et Statistiques II"(6ECTS)
- "Géométrie et Graphes Aléatoires"(6ECTS)
- "Probabilités, Neurosciences et Biologie"(6ECTS)
- "Probabilités et Analyse"(6ECTS)

Ces cours présentent plusieurs domaines à la pointe de la recherche en Probabilités Théoriques et Appliquées. Le contenu de chacun des cours de cette année est décrit dans la brochure.

Les cours du second semestre conduisent les étudiants à une première confrontation avec la recherche sous la forme d'un mémoire ou d'un stage. **Le mémoire** consiste en général en la lecture approfondie d'un ou plusieurs articles de recherches récents, sous la direction d'un membre du Laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation ou d'un enseignant de la spécialité. Il doit être redigé en Latex et soutenu devant un jury.

Le mémoire peut-être remplacé par un rapport de stage. **Le stage** s'effectue dans un organisme de recherche ou un bureau d'études, sous la direction conjointe d'un ingénieur de l'organisme d'accueil et d'un enseignant de la spécialité.

Le travail de mémoire ou de stage s'appuie sur les connaissances obtenus en cours. *Ce travail ne peut pas être entamé par un étudiant qui n'a pas validé les cours de base du premier semestre. Une convention de stage ne peut pas être signée pour les étudiants qui n'ont pas validé le 1er semestre.*

La travail de mémoire ou de stage de courte durée (moins de 3 mois) est accredité de **12ECTS**, les étudiants doivent le compléter par la validation de **TROIS** cours optionnels au choix pour valider 30 ECTS de second semestre.

Le travail de stage industriel de longue durée (à partir de 3 mois) est accredité de **18ECTS**, les étudiants le complètent par la validation de **DEUX** cours optionnels pour valider 30 ECTS au second semestre.

RESPONSABLES

Responsable pédagogique : Madame Irina KOURKOVA,
professeur du laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation
de Sorbonne Université

Responsable administratif : Monsieur Yann Poncin
Couloir 14-15, 2ème étage, bureau 208
4, place Jussieu
Sorbonne Université
75005 Paris
E-mail : yann.poncin@sorbonne-universite.fr
Tel : 01 44 27 53 20

COMMENT POSTULER ?

Suivre les indications sur le lien universitaire ci-dessous du 28 MARS au 01 JUIN 2023.

https://sciences.sorbonne-universite.fr/formation/candidatures-et-inscriptions/master

Il est indispensable de remplir soigneusement et de joindre au dossier du candidat 2023–2024

LE DOSSIER OBLIGATORE COMPLEMENTAIRE

qui se trouve le site de la spécialité :

https://www.lpsm.paris/formation/masters/m2-probabilites-et-modeles-aleatoires/

Sans le dossier complémentaire proprement rempli, le dossier d'un candidat en M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires" sera incomplet et ne pourra pas être considéré par la commission d'admission.

CALENDRIER PREVISIONNEL 2023–2024.

- Inscription administrative sur le site de la scolarité de Sorbonne Université 28 Mars – 01 Juin 2023.
- Le premier semestre débute le lundi 4 septembre et se termine en Janvier.
- Les examens des cours du premier semestre "Modèles Markoveines sur des espaces discrets", "Processus de Markov et Applications" auront lieu au mois de novembre, les examens pour les autres cours du premier semestre auront lieu lors de la deuxième moitié du mois de Janvier 2024.
- Une réunion d'information sur les cours du second semestre aura lieu à la fin du mois de Janvier 2024.
- Le deuxième semestre commencera en Février 2024 et se terminera en Mai 2024. Une pause de deux semaines est prévue pendant les vacances de Noel et les vacances de Pacques de la zone C.
- Les examens des cours du second semestre auront lieu lors de la première moitié du mois de Juin 2024.
- *Les examens de rattrapage pour les cours du premier semestre auront lieu au mois de mars* (pour permettre aux étudiants de partir en stage en avril), pour le deuxième semestre – lors de la deuxième moitié du mois de Juin.
- Pour les étudiants désirant valider le Master en Juillet, le mémoire (ou le stage) doit être soutenu au plus tard le 25 Juin 2024.
- Pour les étudiants désirant valider le Master en Octobre, le mémoire (ou le stage) doit être soutenu au plus tard le 30 Septembre 2024.

COURS

Cours préliminiare :

A.-L. BASDEVANT : *Rappels de probabilités*

A. GODICHON-BAGGIONI : *Rappels de statistiques mathématiques*

Cours fondamentaux du premier semestre pour l'orientation "Processus Stochastiques" :

N. FOURNIER : *Calcul Stochastique et Processus de Diffusion* (9 E.C.T.S)

Th. DUQUESNE : *Processus de Markov et Applications* (9 E.C.T.S)

Th. LEVY : *Convergence de Processus, Grandes Déviations, Percolation* (6 E.C.T.S)

Th. DUQUESNE : *Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions* (6 E.C.T.S)

Cours fondamentaux du premier semestre pour l'orientation "Probabilités Appliquées" :

N. FOURNIER : *Calcul Stochastique et Processus de Diffusion* (9 E.C.T.S)

Th. DUQUESNE : *Modèles Markoviens sur des espaces discrets*(6 E.C.T.S)

G. PAGES, V. LEMAIRE : *Probabilités Numériques, Méthodes de Monte Carlo* (9 E.C.T.S)

I. KOURKOVA : *Statistique et Apprentissage* (6 E.C.T.S)

Pour les étudiants intéressés par la thématique *Probabilités et Analyse*, il est possible *sous réserve de l'accord du responsable du M2 "Probabilités et Modèles Aléatotoires"* de remplacer le cours "Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions" ou "Statistiques et Apprentissage" par le cours du M2 Modélisation de Sorbonne Université
Antonie GLORIA : *Aléa et EDP*

Cours spécialisés du deuxième semestre

(I) Probabilités, Algèbre et Théorie Ergodique (6 E.C.T.S)

Ph. BIANE : Processus déterminantaux, matrices aléatoires, probabilités libres

R. DUJARDIN : Introduction à la théorie ergodique

G. GIACOMIN : Produits de matrices aléatoires et systèmes désordonnés en mécanique statistique

A. ERSCHLER : Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires

(II) Probabilités et Physique (6 E.C.T.S)

C. BOUTILLIER, T. LUPU : Mécanique Statistique Critique en dimension 2 et invariance conforme

Q. BERGER : Surfaces et Polymères aléatoires

C. TONINELLI : Systèmes de particules en interaction

(III) Probabilités, Méthodes Numériques et Algorithmes (6 E.C.T.S)

V. LEMAIRE : Machine learning pour les produits dérivées

B. JOURDAIN : Algorithmes de Monte-Carlo pour chaînes de Markov et méthodes particulaires

P. MONMARCHE : Convergence en temps long pour les processus de Markov

(IV) Processus Stochastiques et Statistiques II (6 E.C.T.S)

I. CASTILLO : Bayésien non-paramétrique et applications

A. BEN-HAMOU : Inégalités de Concentration

Y. HU : Marche aléatoire avec branchement

J. SALEZ : Temps de mélange des chaînes de Markov(Cours du M2 MATH-PSL)

(V) Géométrie et Graphes Aléatoires (6 E.C.T.S)

B. BLASZCZYSZYN : Modèles Géométriques Aléatoires

N. BROUTIN : Limites d'échelles de graphes aléatoires

J.-F. DELMAS, P.-A. ZITT : Les grands réseaux aléatoires denses (les graphons)

(VI) Probabilités, Biologie et Neurosciences (6 E.C.T.S)

M. THIEULLEN : Modèles probabilistes pour les neurosciences

G. NUEL : Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens

Ph. ROBERT : Modèles Stochastiques de la Biologie Moléculaire

(VII) Probabilités et Analyse(6 E.C.T.S)

L. ZAMBOTTI : Rough Paths et applications aux équations différentielles stochastiques

M. TOMASEVIC : Processus de type de McKean-Vlasov et EDP paraboliques

L. DUMAZ : Opérateurs aléatoires

Cours exposés en télé-enseignement

Tous les cours du premier semestre pour suivre l'orientation "Processus stochastiques". (Attention, les cours de l'orientation "Probabilités Appliquées" ne sont pas disponibles en télé-enseignement.)

Les cours spécialisés "Probabilités, Algèbre et Théorie Ergodique" (la partie de R. Dujardin), "Probabilités, Biologie et Neurosciences (la partie de M. Thieullen), Processus Stochastiques et Statistiques II (la Partie de Ismael Castillo). Certains autres cours optionnels du 2nd semestre seront disponibles en tele-enseignement sous reserve de l'accord de professeurs.

Rappels de Probabilités

A-L. Basdevant

1er semestre, 2 semaines en septembre, 30h.

Ce cours préliminaire est destiné à faire le point sur des notions fondamentales de Probabilités abordées en M1 et utilisées systématiquement par la suite dans les cours du M2. Parmi ces notions on peut citer :

- éléments de la théorie de mesure et intégration
- le conditionnement
- les différentes notions de convergence
- les martingales à temps discret.

Le cours sera complété par des séances d'exercices et une bibliographie pouvant servir de référence tout au long de l'année de M2.

Calcul Stochastique et Processus de Diffusions

N. Fournier

1er semestre, (octobre – début janvier), 4h par semaine.

Dans ce cours nous allons introduire les techniques de bases du calcul stochastique :

1) le mouvement brownien, la continuité de ses trajectoires, la propriété de Markov (forte)

2) l'intégration stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable, la formule d'Ito, le théorème de Girsanov

3) les équations différentielles stochastiques (EDS) et leurs solutions faibles ou fortes (dites diffusions), les liens avec les équations aux dérivées partielles

4) la formule d'Ito-Tanaka, le temps local du mouvement brownien, les EDS réfléchies

5) EDS à coefficients non-lipschitziens, processus de Bessel

Références bibliographiques

Ikeda, N. et Watanabe, S. : *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes ; 2e édition.* North Holland, 1988.

Le Gall, J.-F. : *Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique.* Springer, Collection: Mathe'matiques et Applications, Vol. 71 2013, VIII.

Karatzas, I. et Shreve, S. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus ; 2e édition corrigée.* Springer, 1994.

Mörters, P. et Peres, Y. : *Brownian Motion.* Cambridge University Press, 2010.

Revuz, D. et Yor, M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion, 3e édition.* Springer, 1999.

Rogers, L.C.G. et Williams, D. : *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Itô Calculus.* Wiley, 1987.

Processus de Markov et Applications

Th. Duquesne

1er semestre, 1ère – 8ème semaines (septembre – debut novembre), 6h par semaine.

Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable : classification, mesures invariantes, comportement limite, théorèmes ergodiques. On considèrera des chaînes de Markov apparaissant en biologie (modèles de Wright-Fisher, de Moran), en dynamique des population (chaîne de naissance et de mort, modèle de Galton-Watson) et en mécanique statistique. Processus de Markov de saut pur (Chaînes de Markov sur un espace dénombrable en temps continu.), leur matrice d'intensité, les équations de Kolomogrov, le phénomène d'explosion, le comportement limite, la réversibilité. On considèrera des applications en biologie et des modèles d réseaux stochastiques.

Processus de Markov sur un espace mesurable général, familles de Markov Félleriennes, propriété de Markov forte. Le semi-groupe, le générateur et la résolvante, divers exemples de calculs dont le générateur du mouvement Brownien et autres. Le théorème affirmant que le générateur détermine le sémi-groupe à travers la résolvante. Calcul de la mesure invariante et de lois de fonctionnelles d'un processus de Markov à partir de son générateur. Formule de Feynman-Kac. Problème de martingales. Solutions des équations différentielles stochastiques en tant que processus de Markov. Leurs générateurs. Leurs fonctionnelles "arrêtées". Liens avec les équations aux dérivées partielles elliptiques avec de différentes conditions au bord.

Convergence de Processus, Grandes Déviations, Percolation

Th. Levy

1er semestre, 3ème – 14ème semaines (octobre – decembre), 2h par semaine pendant 12 semaines.

Objectifs de l'UE : Ce cours consiste en trois chapitres largement indépendants dont le point commun est d'explorer des interactions entre la théorie des probabilités et la topologie ou la géométrie.

1. Convergence des processus. Le but de ce chapitre est de est de démontrer un théorème de Donsker qui affirme qu'une grande classe de marches aléatoires, convenablement renormalisées, converge vers le mouvement brownien. Pour ce faire, nous étudierons de manière assez générale les mesures boréliennes de probabilités sur les espaces métriques, et la convergence faible de suites de telles mesures.

2. Grandes déviations. Notre objectif sera de comprendre ce qu'est un principe de grandes déviations, d'en étudier quelques propriétés générales, et deux exemples génériques fondamentaux que sont le théorème de Sanov et le théorème de Cramér.

3. Percolation. Cette troisième partie sera consacrée à une introduction au modèle de la percolation par arêtes, et à son étude sur le réseau cubique. Notre objectif sera de démontrer que ce modèle présente une transition de phase et de démontrer qu'en dimension 2, cette transition de phase a lieu pour la valeur 1/2 du paramètre.

Prérequis : Une connaissance de la théorie de la mesure et de l'intégration, et des bases de la théorie des probabilités ; un contact avec la topologie des espaces métriques, et avec de l'analyse fonctionnelle.

Thèmes abordés : Convergence des processus : Espaces polonais, Espace des mesures sur un espace polonais, Tension, Théorème de Prokhorov, Théorème de Donsker, Convergence fonctionnelle des processus continus, critère de Kolmogorov. Grandes déviations : Entropie relative de deux mesures, Théorème de Sanov, Transformation de Legendre, Théorème de Cramér. Percolation : Notion de transition de phase, Ergodicité, Inégalité FKG, Phases sous- et sur-critique, Théorème de Kesten. ***

Nuages Poissoniens, Processus de Levy, Excursions.

Th. Duquesne

1er semestre, 10ème – 15ème semaines (fin novembre – début janvier), 6h par semaine sur 4 semaines, ou 4h par semaine sur 6 semaines.

Objectifs de l'UE : ce cours est un approfondissement du cours "Processus de Markov et Applications". On y étudie les processus de Lévy ainsi que certains processus de branchement. On introduira les mesures ponctuelles de Poisson et on exposera la théorie des excursions avec des applications aux processus de Lévy.

Prérequis : il est fortement recommandé d'avoir suivi le cours "Processus de Markov et Applications" et le cours "Convergence de Processus, Grandes déviations, Pércolation".

Thèmes abordés :

- Retour sur les processus de Feller.
- Mesures ponctuelles de Poisson.
- Processus de Lévy.
- Processus de branchement à espace d'états continu.
- Théorie des excursions.

Probabilités Numériques, Méthodes de Monte-Carlo

G. Pages, V. Lemaire

1er semestre, 3ème – 15ème semaines (octobre – début janvier), 2h de cours, 3h d'illustrations numŕeiques en C++11 par semaine.

Objectifs du cours :

Le but de ce cours est de présenter les méthodes de Monte-Carlo et de Quasi-Monte-Carlo d'usage courant . De nombreux exemples issus de problèmes de calcul de prix et de couverture d'options illustrent les développements. Une mise-en-oeuvre informatique des techniques abordés sera effectuée lors des séances de TD. Chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C) implémentant soit des calculs de prix et de couvertures d'options soit des simulations d'autres modèles. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus. Ce cours aborde les thèmes suivants :

1.Introduction à la simulation : génération de variables aléatoires suivant les lois usuelles.

2.Méthode de Monte-Carlo : calcul d'espérance par simulation.

3.Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, échantillonnage préférentiel, variables antithétiques, stratification, conditionnement.

4.Quasi-Monte-Carlo : techniques de suites à discrépances faibles.

5.Méthodes de gradient stochastique et de Bootstrap.

6.Discrétisation en temps des équations différentielles stochastiques (schéma d'Euler, de Milshtein) : application au pricing d'options européennes.

7.Amélioration de la méthode dans le cas d'options path-dependent : ponts browniens,...

8.Calcul des couvertures et sensibilités par méthode de Monte-Carlo

9.Introductionà la simulation des processus à sauts.

En parallèle de ce cours, 8 séances de 3 heures seront consacées à la mise en oeuvre de ces algorithmes en C++11, en illustrant différents concepts de programmation: la programmation orientée objet, la programmation générique et la programmation fonctionnelle.

L'évaluation du cours se fait par un examen et le rendu d'un projet informatique (au second semestre): chaque étudiant devra réaliser, en binôme, un projet informatique (en langage C/C++) implémentant soit des calculs de prix et de couvertures d'options soit des simulations de modèles financiers. Il remettra un rapport décrivant les méthodes utilisées et commentant les résultats obtenus.

Modèles Markoviens sur des espaces discrets

Th. Duquense

1er semestre, 1ère – 4ème semaines (septembre – debut novembre), 6h par semaine.

Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable : classification, mesures invariantes, comportement limite, théorèmes ergodiques. On considèrera des chaînes de Markov apparaissant en biologie (modèles de Wright-Fisher, de Moran), en dynamique des population (chaîne de naissance et de mort, modèle de Galton-Watson) et en mécanique statistique. Processus de Markov de saut pur (Chaînes de Markov sur un espace dénombrable en temps continu), leur matrice d'intensité, les équations de Kolomogrov, le phénomène d'explosion, le comportement limite, la réversibilité. On considèrera des applications en biologie et des modèles d réseaux stochastiques.

Statistique et Apprentissage

I. Kourkova

1er semestre, 10ème – 15ème semaines (fin novembre – début janvier), 6h par semaine sur 4 semaines, ou 4h par semaine sur 6 semaines.

Objectifs : Ce cours vise à donner aux étudiants les bases fondamentales du raisonnement et de la modélisation statistique, tout en présentant une ouverture vers des thématiques de recherche contemporaines. L'accent sera particulièrement mis sur l'utilisation pratique des nouveaux objets rencontrés.

Prérequis : Une bonne connaissance du calcul des probabilités et de l'algèbre linéaire.

Thèmes abordés :

- Rappels de probabilités, estimation ponctuelle, estimation par intervalles, tests.
- Modèle linéaire : estimation, intervalles de confiance et tests.
- Introduction à l'apprentissage statistique et à la classification supervisée.
- Minimisation du risque empirique, théorème de Vapnik-Chervonenkis.
- Règles de décision non paramétriques (méthode des k plus proches voisins et arbres de décision).
- Quantification et classification non supervisée.

Aléa et EDP

A. Gloria

Cours du M2 Modélisation de Sorbonne Université. Voir
https://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/enseignement/cours/64.html

Probabilités, Algèbre, Théorie Ergodique

2ème semestre, Février-Mai.

PARTIE I : **Ph. Biane,** Processus déterminantaux, matrices aléatoires, probabilités libres

On étudiera les processus déterminantaux en lien avec la théorie des matrices aléatoires, notamment le GUE. On developpera aussi le sujet de probabilités libres.

PARTIE II : **R. Dujardin,** Introduction à la théorie ergodique

Cette partie du cours porte sur la théorie ergodique des systèmes dynamiques déterministes et aléatoires, câ™est Ã dire lâ™étude de ces systèmes dynamiques par la théorie de la mesure et des probabilités. Une question fondamentale dans ce contexte est la description du comportement asymptotique des orbites typiques au sens de la mesure.

On introduira dans un premier temps les concepts, exemples et résultats fondamentaux de la théorie déterministe:

- le vocabulaire des systÃmes dynamiques, et les exemples de base (dynamique sur le cercle, sur les tores, systèmes symboliques) - les notions dâ™ergodicitÃ©, de mélange, les théorèmes ergodiques classiques.

La deuxième partie du cours portera sur les systèmes dynamiques aléatoires. Les notions suivantes devraient être abordées (liste non exhaustive):

- mesures stationnaires vs mesures invariantes, théorèmes ergodiques aléatoires - cocycles et théorème d'Oseledets - produits aléatoires de matrices - principe dâ™invariance

PARTIE III : **G. Giacomin :** Produits de matrices aléatoires et systèmes désordonnés en mécanique statistique

Plusieurs problèmes de mécanique statistique des systèmes désordonnés peuvent être réduit à l'étude de produits de matrices aléatoires. La généralité de cette affirmation est telle que les produits de certaines classes de matrices aléatoires sont considérés comme des prototypes de divers systèmes désordonnés, voire constituent les modèles standard eux-mêmes. Le cas du produit de matrices deux par deux contient d'ailleurs déjè souvent le coeur des questions. Malgré le caractère très basique de ces modèles, plusieurs questions demeurent ouvertes. Le cours s'organisera en deux parties :

Partie I. Introduction à la théorie des produits de matrices aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec une attention particulière au cas des matrices deux par deux.

Partie II. Etude de classes de produits de matrices aléatoires liées aux modèles désordonnés.

- IIa. Matrices de transfert : le modèle d'Ising classique d=1 avec champ aléatoire, le modèle d'Ising quantique d=1 avec champ transverse aléatoire, le modèle d'Ising classique d=2 avec désordre colonnaire.

- IIb. La localisation d'Anderson : l'équation de Schrödinger avec potentiels aléatoires.

Les pré-requis du cours se limitent aux mathématiques (et notamment, aux probabilités) qui sont déjà dans le bagage culturel des élèves d'un M2 de probabilités (ou, en tout cas, au deuxième semestre). La littérature sur le sujet est vaste: il y aura des notes du cours.

PARTIE IV : **A. Erschler :** Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires.

Diverses familles de fonctions harmoniques reflètent la géométrie asymptotique des graphes. Il existe différents concepts du bord d'espaces métriques infinis et des graphes, en particulier pour des graphes de Cayley de groupes. Le bord de Martin est un espace topologique qui fournit la description de fonctions harmoniques positives. Par le théorème de convergence des martingales, telles fonctions convergent le long de trajectoires infinies unilatérales de la marche aléatoire sur un graphe. Si nous supposons que les fonctions sont bornées, elles peuvent être récupéré à partir de ces valeurs limites, ce qui conduit à l'une des définitions du bord de Poisson. Il s'agit d'un espace de probabilité, qui est essentiel pour comprendre le comportement asymptotique des marches aléatoires sur les graphes et les groupes. D'autres classes des fonctions études récemment incluent les fonctions harmoniques Lipshitziennes, qui apparaît dans la preuve de Kleiner du théorème de croissance polynomiale. Dans ce cours, nous étudions les fonctions harmoniques et différentes notions des bords pour les marches aléatoires sur les graphes, en nous concentrant sur le cas où les graphes sont transitifs et les opérateurs sont homogènes. Cette dernière classe comprend les marches aléatoires sur des groupes. Nous étudierons des résultats fondamentaux du à Doob, Furstenberg, Azencott, Cartier, Margulis, Guivarch, Kaimanovich, Vershik et Derriennic, et à la fin du cours nous prévoyons de discuter quelques résultats très récents dans ce domaine.

Aucun prérequis spécifique en probabilité n'est requis.

Probabilités et Physique

PARTIE I : **Q. Berger,** Surfaces et Polymères aléatoires

On s'intéressera dans ce cours à des modèles d'interfaces (ou surfaces) aléatoires *discrètes* en dimension $d+1$: on considérera des fonctions $\varphi : \Lambda \to R$ aléatoires, où Λ est un domaine fini de Z^d, et où $\varphi(x)$ représente la hauteur de la surface au point x. Le but du cours est d'utiliser ces modèles comme prétexte pour aborder certaines problématiques standard de mécanique statistique. Un exemple d'interface en dimension $1+1$, est celui de la trajectoire $S_0, S_1, \ldots, S_n$ d'une marche aléatoire sur R: ce modèle est notamment utilisé pour décrire un polymère aléatoire, constitué d'un grand nombre de monomères dont les positions sont données par $S_0, \ldots, S_n$. Un autre exemple que l'on étudiera est le champ libre gaussien (discret) en dimension d. On étudiera les propriétés de ces surfaces, notamment lorsqu'elles sont soumises à la contrainte d'être au-dessus d'un mur dur (ce qui force φ à être positive), et/ou soumises à une interaction attractive ou répulsive lorsque la surface touche le mur. Le but est de comprendre le phénomène de transition de phase, entre un régime où la surface est "repoussée" par le mur, et un régime où la surface est "accrochée" au mur. Une autre question que l'on abordera est celle de l'influence de désordre sur cette transition dite d'accrochage. Il s'agit de considérer une version *désordonnée* du modèle, où les interactions entre la surface et le mur sont perturbées de manière aléatoire. Nous verrons alors ce que l'on peut dire sur ce modèle perturbé, le but étant de déterminer si la nature de la transition de phase est modifiée par l'introduction de ces perturbations — il s'agit d'une question centrale en physique des systèmes désordonnés.

Références:

[1] S. Friedli, Y. Vélénik, *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge University Press, 2017.

[2] G. Giacomin, *Random Polymer Models*, Imperial College Press, 2007

[3] Y. Vélénik, *Localization and delocalization of random interfaces*, Probability surveys, Vol. 3, 2006, pp. 112-169.

Mots-clés: marches aléatoires, surfaces aléatoires, processus de renouvellement, transition de phase, systèmes désordonnés.

Partie II : **C. Boutiller, T. Lupu:** Mécanique statistique critique en dimension 2 et invariance conforme

Les physiciens théoriciens, grâce à la théorie conforme des champs, ont pu prédire et classifier le comportement de modèles de mécanique statistique en dimension 2 au point critique, sous l'hypothèse que ceux-ci avaient une limite d'échelle invariante conforme.

Cependant, il a fallu attendre le début de ce siècle pour obtenir la preuve mathématique que ces modèles discrets avaient effectivement ces propriétés.

Dans ce cours nous nous proposons de d'étudier deux exemples de modèles pour lesquels cette invariance conforme a été établie :

- la percolation par site sur le réseau hexagonal ;
- les pavages par dominos.

Dans une deuxième partie du cours, nous donnerons une brève introduction aux processus SLE, introduits par Schramm à la fin des années 1990. Ces processus stochastiques invariants conformes jouent un rôle prépondérant dans la compréhension mathématique des limites continues de ces phénomènes critiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin. Planar percolation with a glimpse of Schramm-Loewner evolution. *Probab. Surv.*, 10 :1–50, 2013.

2. Richard Kenyon. Conformal invariance of domino tiling. *Ann. Probab.* , 28(2) :759–795, 2000.

3. Oded Schramm. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. In *Proceedings of the international congress of mathe- maticians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006. Volume I : Plenary lectures and ceremonies*, pages 51–543. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007.

4. Stanislav Smirnov. Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 333(3) :239–244, 2001.

5. Wendelin Werner. *Percolation et modèle d'Ising*, volume 16. Paris : Société Mathématique de France, 2009.

Partie III : **C. Toninelli :** Systèmes de Particules en Interaction

Ce cours est une introduction aux systèmes de particules en interaction, un domaine des probabilités très fécond et qui a des applications dans nombreuses disciplines (physique, biologie, sciences sociales, epidemiologie, ...) Il s'agit de modèles sur reseaux qui évoluent selon un processus de Markov, donc sur espace discret et en temps continu. L'enjeu est celui de determiner le comportement macroscopique qui émerge des intéractions locales dans la limite de grand nombre de particules. On s'intéressera en particulier à étudier le comportement à temps long de ces modèles: mésures invariantes, bassin d'attraction, émergence de transition de phase, temps de convergence à l'équilibre. A travers l'etude de differents modèles, nous introduirons des outils clés tel que la dualité, les technique de couplage, des inégalités fonctionnels. On fournira une ouverture naturelle vers d'autres tématiques tel que l'étude des limites hydrodynamiques et la métastabilite.

Aucun prérequis est necéssaire pour suivre ce cours. Pour vous faire une idée du contenu vous pouvez consulter une ébauche de notes de cours sur le site

https://www.ceremade.dauphine.fr/ toninelli/notes$_{I}PS_{C}T.pdf$

Probabilités, Méthodes Numériques, Algorithmes

PARTIE I : **V. Lemaire** Machine learning pour les produits dérivées

Cette partie du cours se fait en commun avec le M2 "Probabilités et Finance". Voir https://finance.math.upmc.fr/enseignements/$2_m n_{1_o} ptions_a mericaines/$

PARTIE II : **B. Jourdain,** Algorithmes de Monte-Carlo pour chaines de Markov et méthodes particulaires

Pour simuler suivant une loi cible π sur un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$, l'algorithme de Metropolis-Hastings construit une chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ qui admet π comme mesure réversible. Cet algorithme est l'une des méthode numériques probabilistes les plus largement utilisées en statistique, en physique, en chimie quantique comme en simulation moléculaire si bien qu'une recherche google sur son nom fournit plus de 350 000 résultats. Lorsque la chaine de Markov est ergodique, la loi de X_n converge vers π lorsque n tend vers l'infini et pour $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to \mathbf{R}$ mesurable et telle que $\int_E |\varphi(x)|\pi(dx) < \infty$, la loi forte des grands nombres ergodique assure la convergence presque sûre de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k)$ vers $\int_E \varphi(x)\pi(dx)$ lorsque $n \to \infty$. Dans cette partie du cours, nous illustrerons sur l'exemple de cet algorithme la condition suffisante d'ergodicité pour une chaine de Markov à valeurs dans un espace général donnée dans [**?**] et nous établirons sous cette condition la loi forte des grands nombres ergodique. Nous montrerons le théorème de la limite centrale associé sous une condition renforcée qui permet de résoudre l'équation de Poisson. Nous énoncerons le résultat de Peskun [**?**] qui explique comment minimiser la variance asymptotique. Nous verrons comment guider le choix de la variance des propositions de l'algorithme de Metropolis-Hastings par marche aléatoire à l'aide des résultats de scaling [**?**]: lorsque la loi cible est une probabilité produit sur un espace dont la dimension tend vers l'infini, la première composante de l'algorithme accelère en temps converge en loi vers une diffusion. Enfin, lorsque la convergence vers l'équilibre est très lente (phénomène de métastabilité), nous étudierons comment l'accélérer par des versions de l'algorithme avec échantillonnage préférentiel adaptatif comme Wang-Landau, SHUS, metadynamics ou well-tempered metadynamics.

Dans un second temps, nous étudierons les algorithmes particulaires génétiques [**?**] qui en alternant une étape de sélection où les particules interagissent avec une phase de mutation où elles évoluent de facon indépendante suivant un noyau markovien permettent de réduire la variance ou de générer des événements rares. Voici la BIBLIOGRAPHIE.

- Del Moral, P.: Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems with applications. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, 2004.
- Gelman, A., Gilks, W. R. and Roberts, G. O., Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms, Ann. Appl. Probab. 7(1):110-120, 1997
- Hairer, M., Mattingly, J. C., Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains. Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI, 109-117, Progr. Probab., 63, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- Peskun, P. H., Optimal Monte-Carlo sampling using Markov chains, Biometrika 60(3):607-612, 1973.

Partie III : **P. Monmarché** Convergence en temps long de processus de Markov

Le cours porte sur les processus de Markov à temps et espace continu, notamment les diffusions et les processus déterministes par morceaux, et les equations aux dŕivés partielles satisfaites par leurs lois. Le but est de passer en revue des techniques pour établir la relaxation à l'équilibre en temps long pour de tels processus, avec des vitesses de convergence quantitatives en différents sens (variation totale, norme L^2, entropie relative, distances de Wasserstein…). On motivera l'étude, entre autre, en illustrant ces résultats sur les algorithmes Monte-Carlo Markov Chain. Seront notamment abordés :

- Fonctions de Lyapunov et minoration
- Distances de Wasserstein, méthodes de couplage
- Méthodes d'entropie, inégalitÃ©s fonctionnelles, calcul de Bakry-Ãimery
- Métastabilité Ã basse température
- Interaction champ moyen, temps long pour des EDP non-linéaire
- Processus non-réversibles, cinétiques, hypocoercivité

Bibliographie

[1] D. Bakry, I. Gentil, and M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, volume 348 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2014.

[2] C. Villani. Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202(950):iv+141, 2009.

Processus Stochastiques et Statistiques II

PARTIE I : **I. Castillo,** Bayésien non paramétrique et applications

L'approche bayésienne en statistiques consiste à munir l'espace des paramètres du modèle statistique d'une loi de probabilité, la loi a priori. Chaque loi du modèle est vue comme la loi des données conditionnellement au paramètre. L'estimateur bayésien est alors la loi conditionnelle du paramètre sachant les données. C'est une mesure de probabilité, aléatoire à travers sa dépendance en les données. L'utilisation pratique d'algorithmes basés sur des lois a posteriori a connu un essor très important depuis la fin des années 1990, avec de nombreuses applications en statistique et apprentissage.

Dans ce cours, nous introduisons tout d'abord des outils généraux qui permettent d'étudier du point de vue mathématique la convergence de lois a posteriori, d'après des travaux de Ghosal, Ghosh et van der Vaart (2000-2010). Ensuite, nous considérons deux types d'applications. D'une part, nous verrons comment la théorie précédente s'applique à un cadre d'estimation de fonction de régression et à des modèles dits de grande dimension. D'autre part, nous verrons des applications récentes à des lois sur des objets "profonds", et montrerons en quoi ceux-ci permettent une adaptation automatique à des structures cachées de petite dimension. I) Théorie générale de convergence de lois bayésiennes a posteriori: l'approche de Ghosal, Ghosh, van der Vaart

II) Applications 1 : estimation de fonctions de régression par processus gaussiens, modèles de grande dimension

III) Applications 2 : deep Bayes. Réseaux de neurones profonds et lois deep-ReLU, processus Gaussiens profonds

Une bibliographie du cours et les informations pratiques se trouvent sur la page web d'Ismaël Castillo.

PARTIE II : **A. Ben-Hamou** Inégalités de concentration

En probabilités comme en statistiques, on est souvent amené à étudier les déviations d'une variable aléatoire par rapport à son espérance. Alors que le théorème central limite nous renseigne sur les fluctuations asymptotiques, les inégalités de concentration fournissent des résultats non-asymptotiques (à n fixé). Les inégalités exponentielles classiques, comme l'inégalité de Hoeffding, concernent les sommes de variables indépendantes. Dans ce cours, nous verrons que le phénomène de concentration de la mesure apparait aussi pour des fonctions bien plus complexes que la somme: " une variable qui dépend (de facon lisse) de beaucoup de variables indépendantes (mais pas trop de chacune d'entre elles) est essentiellement constante " (Michel Talagrand).

Parmi les méthodes et résultats abordés dans ce cours, citons par exemple les inégalités de Poincaré et de Sobolev, la méthode entropique, la méthode de transport, le lien entre concentration et isopérimétrie. Nous nous intéresserons aussi au cas de variables dépendantes et verrons notamment comment la méthode de Stein permet d'obtenir des résultats de concentration dans des cadres non-indépendants.

La théorie de la concentration trouve des applications dans de nombreux domaines, et le cours sera illustré par beaucoup d'examples issus de la physique statistique, mais aussi d'autres contextes comme l'apprentissage statistique, les matrices et graphes aléatoires, le mélange de chaines de Markov, la théorie de l'information.

PARTIE II : **Y. Hu,** Marche aléatoire avec branchement

Résumé: La marche aléatoire avec branchement est un modèle étudié dans plusieurs domaines tels que la théorie de probabilités, la physique statistique, l'algorithme aléatoire ou encore la génétique des populations. Ce modèle peut être considéré comme un processus de Galton-Watson combiné avec des déplacements spatiaux. Au début, à la génération 0, un seul individu se trouve à l'origine. Cet individu donne naissance à des enfants qui se déplacent dans l'espace en suivant un processus ponctuel (composé du nombre d'enfants et de leurs positions spatiales), ce qui constitue la première génération du processus. Ensuite, on répète cette procédure en prenant chaque enfant comme ancêtre, indépendamment les uns des autres, avec la même loi de reproduction et de déplacement. Le modèle continu, appelé mouvement brownien branchant, est étroitement lié à l'étude des équations Fisher-KPP. Ces deux modèles ont fait l'objet de recherches soutenues ces dernières décennies.

Dans ce cours, l'accent sera mis sur le cas unidimensionnel de ce modèle. Nous présenterons en particulier les études de ses martingales et de ses valeurs extrêmes, et si le temps le permet, nous aborderons également des modèles connexes tels que les marches aléatoires dans un arbre aléatoire et le champ gaussien libre.

Pré-requis: Cours "Calcul Stochastique" du 1er semestre de M2 Probabilités.

Principales références:

J. Berestychi. *Topics in Branching Brownian motion.* Notes de cours 2014.

Z. Shi: *Branching Random Walks.* Cours école d'été Saint-Flour 2012.

O. Zeitouni. *Branching Random Walks and Gaussian Fields.* Notes for lectures, 2020.

PARTIE IV : **J. Salez,** Temps de mélange des chaines de Markov

Ce cours fait partie de l'offre du Master partenaire Mathématiques Appliqués et Théorique de l'Université PSL et il sera enseigné à l'Université Paris Dauphine.

Pour l'abstract voir le site

https://dauphine.psl.eu/formations/masters/mathematiques-et-applications/m2-mathematiques-appliquees-et-theoriques/formation "

Géométrie et Graphes Aléatoires

PARTIE I : **B.Blaszczyszyn** Modèles géométriques aléatoires

Le cours fournit un accès rapide à certains modèles populaires dans la théorie de graphes aléatoires, processus ponctuels et ensembles aléatoires. On rencontre ces modèles dans l'analyse mathématique de réseaux (sociaux, de communication, biologique, etc). Le cours est composé des quinze lecons suivantes:

- Percolation sur la grille carrée,
- Arbre de Galton-Watson,
- Graphe d'Erdős-Rényi — l'émergence de la composante géante,
- Modèle de configuration — graphe avec la distribution des dégrées donnée,
- Graphes aléatoires unimodulaires — noeud typique du graphe,
- Graphe d'Erdős-Rényi — l'émergence de la connectivité,
- Processus ponctuel de Poisson,
- Probabilités de Palm — conditionnement par un point,
- Processus à noyau dur (hard core),
- Processus ponctuels stationnaires — principe de transport de masse,
- Mosaique stationnaire de Voronoi — formules inverse et d'échange de Neveu,
- Ergodicité et les point-shifts invariants,
- Ensembles fermés aléatoires,
- Modèle Booléen et les processus de couverture,
- Connexité des ensembles aléatoires et la percolation continue.

L'attention sera portée sur les relations entre les différents modèles et sur les concepts fondamentaux. Par exemple, le principe de transport de masse relie les graphes unimodulaires et les processus ponctuels stationnaire en permettant de définir l'élément typique dans des grandes structures aléatoires, régulières.

PARTIE II : **N. Broutin** Limites d'échelles de graphes aléatoires

A quoi ressemble un grand arbre choisi au hasard ? Et un graphe ? Voir par exemple les simulations données sur la page web de Nicolas Broutin.

Peut-on justifier formellement l'impression que donne les simulations, à savoir que les ces structures on l'air d'être fractales ?

L'objet du cours est de tenter de répondre à ces questions et de présenter certaines limites de graphes aléatoires considérés en temps qu'espaces métriques. Il s'agira à la fois (a) d'introduire des objets centraux intimement liés au mouvement brownien, (b) de présenter un ensemble de techniques qui sont basées sur des représentations combinatoires explicites et (c) d'étudier les applications aux graphes aléatoires dans le régime dit critique. En particulier, les relations entre objets discrets et continus seront au centre de nos préoccupations.

Le cours comportera deux parties: dans un premier temps, nous considérerons des arbres aléatoires de type Galton–Watson et leurs limites. Nous parlerons en particulier des différents encodages des arbres, de leur convergences, ainsi que tu point de vue 'objectif' qui consiste à les considérer comme des espaces métriques (mesurés); ca sera l'occasion de parler de la topologie de Gromov-Hausdorff sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts. Cela nous permettra d'introduire l'arbre continu brownien de plusieurs maniÃres (en particulier comme métrique aléatoire sur $[0, 1]$, ou encore par découpage de $\mathbf{R}_+$ et reorganisation/recollage des morceaux), et d'étudier certaines de ses propriétés. Nous verrons en particulier qu'il s'agit d'un objet fractal qui est au coeur de la construction de nombreux objets limites de structures combinatoires (de la même maniÃre que le mouvement brownien est central pour les convergences fonctionnelles).

Nous verrons ensuite comment, à partir des techniques d'explorations, il est possible d'obtenir la limites de certains graphes aléatoires dans le régime dit 'critique' qui précÃde l'émergence d'une composante connexe macroscopique. En particulier, nous construirons les objets limites à partir de l'arbre brownien continu. Là encore, nous nous efforcerons de développer plusieurs points de vue complémentaires. Nous parlerons aussi de processus de coalescence (en particulier le coalescent multiplicatif) que l'on peut définir comme le processus qui régit la dynamique des tailles des compososantes connexes d'un graphe aléatoire lorsque l'on ajoute des arêtes à la bonne vitesse.

Nous aborderons ensuite certains ces thÃmes choisis parmi les suivants: universalité de l'arbre continu brownien, universalité des limites de graphes aléatoires, processus de fragmentation sur l'arbre continu brownien, généalogie de la fragmentation de l'arbre continu et arbre des coupes, constructions explicites des coalescents additifs et multiplicatifs standards.

PARTIE III : **J.-F. Delmas, P.-A. Zitt** Les Grands réseaux aléatoires denses (Graphons)

Le cours s'inspire du livre de Lovasz (2012) "Large networks and graph limits"

Il s'agit de présenter la théorie des grands graphes denses (graphe à n sommets et le degré de chaque sommet de l'ordre de n) qui a été développée depuis les années 2000. Cette théorie élégante décrit ces graphes denses par une fonction $(x, y) \to W(x, y)$ qui donne la probabilité que les "sommets" x et y soit connectés, où x et y vivent dans le continuum $[0, 1]$. Cela inclus en particulier les modèles SBM (stochastic bloc model).

Ce cours est à la frontière de l'analyse, de la combinatoire et des probabilités.

Plan du cours:

(1) Graphe, densité d'homomorphisme et noyaux

(2) Distance de coupe et Compacité de l'espace des graphons

(3) Échantillonnage et Lemmes de comptage

(4) Caractérisation de la convergence des graphons

(5) Applications (par exemple: modèle d'attachement préférentiel, peut on réordonner les sommets de sorte que le degré soit croissant, limite de graphe aléatoire avec séquence des degrés donnée, détection de communauté, ...)

Probabilités, Biologie et Neurosciences

PARTIE I : **M. Thieullen,** Modèles Probabilistes pour les Neurosciences

Les modèles stochastiques sont indispensables pour décrire la variabilité des phénomènes observés en Neurosciences. Les modèles probabilistes bâtis sur l'observation des phénomènes physiologiques ou sur des perturbations de modèles déterministes antérieurs conduisent à de nombreuses questions car ils ne satisfont pas toujours les hypothèses classiques. Le cours abordera certaines de ces questions: premier temps de passage, formule de Feynman-Kac, systèmes lents-rapides, applications des grandes déviations, comportement stationnaire, approximation diffusion, processus de Markov déterministes par morceaux, modèles champ moyen, propagation du chaos. Le lien avec les modèles basés sur des équations aux dérivées partielles sera souligné.

PARTIE II : **G. Nuel,** Propagation d'évidence dans les réseaux bayésiens

Notion de réseaux bayésien (vu comme une généralisation des mode'les Markovien discrets) - notion d'évidence, marginalisation - notion de junction tree, heuristiques de construction - notion de messages, th'eorèmes fondamentaux - algorithmes de propagation, inward/outward, lois jointes - applications diverses (chaines de Markov conditionnées par ses deux extrémités, chaînes de Markov cachées sous contraintes, arbres Markoviens avec boucles, etc.) - calcul et maximisation de de la vraisemblance en présence de données complètes - maximisation de la vraisemblance en présence de données incomplètes (par exemple par algorithme EM ou par optimisation multi-dimensionnelle directe)

L'ensemble du cours sera illustré par de nombreux exemples, notamment dans le contexte biomédical (diagnostique d'une maladie, prise en charge d'un patient aux urgences, génétique humaine, etc.), pour lesquels les calculs seront implémentés sous le logiciel R (pas de pré-requis car niveau technique de programmation assez faible).

NB: bien que le mot clef bayésien soit dans l'intitulé du cours, celui-ci ne traite absolument pas l'inférence bayésienne.

PARTIE III : **Ph. Robert,** Modèles Stochastiques de la Biologie Moléculaire

Ce cours présente plusieurs modèles mathématiques fondamentaux de la biologie moléculaire où les phénomènes aléatoires jouent un rôle-clé. Aucune notion de biologie n'est prérequise.

On s'intéressera tout d'abord à l'expression du gène, i.e. la production de protéines dans les cellules prokaryotes (comme les bactéries). En raison du milieu désordonné du cytoplasme de ces cellules, les expériences montrent une grande variabilité du nombre de protéines d'un type donné dans les cellules d'une même culture. Les modèles dans ce contexte ont pour objectif d'identifier les paramètres de la cellule qui permettent de contrôler la variabilité de la production de protéines.

La deuxième partie s'intéressera aux phénomènes de polymérisation dans un cadre biologique. Certaines protéines à l'intérieur de la cellule ont la propriété de pouvoir s'assembler en longues fibres appelées polymères. De nombreux processus biologiques utilisent ces mécanismes qui contribuent au bon fonctionnement des cellules, pour l'élaboration du cytosquelette notamment. Dans certains cas cependant ces phénomÃÂnes peuvent être pathologiques, dans les cellules nerveuses notamment à des maladies comme celle d'Alzheimer semblent être liées à ce type de mécanismes. On observe dans les expériences in vitro que, au bout d'un temps très variable suivant les expériences, la concentration en polymères passe de la valeur 0 Ã une valeur élevée. Les modèles probabilistes utilisés ont pour objet de pouvoir expliquer la variabilité des phénomènes observés et d'étudier l'impact des différents paramètres sur la variance du temps de polymérisation.

Les méthodes probabilistes présentées utilisent plusieurs types de techniques

- Calcul stochastique pour les processus ponctuels de Poisson marqués
- Théorèmes limites pour les processus de sauts markoviens.
- Méthodes d'homogÉnéisation.

qui seront rappelées lors du cours.

1. **Introduction**
   - Introduction au calcul stochastique pour les processus ponctuels de Poisson marqués. Rappels sur les martingales associées aux processus markoviens de sauts.
   - Convergence en distribution des processus de sauts markoviens. Homogénéisation des processus de Markov.
   - Modèles probabilistes des phénomènes chimiques. Loi d'action de masse, équations de Michaelis-Menten.
2. **Expression du Gène**.
   - Modèles markoviens et non-markoviens de la production de protéines. Existence et caractérisation de la loi invariante de la concentration d'une protéine d'un type donné. Etude de la variance à l'équilibre.
   - Compétition pour les ressources de la cellule dans la production de protéines: un modèle de champs moyen.
   - Etude de l'impact de l'auto-régulation de la production de protéines sur la variabilité du nombre de protéines: méthodes d'homogénéisation.
3. **Modèles de la Polymérisation**.
   - Un modèle simplifié de la polymérisation avec deux espaces de polymères. Théorèmes central-limite fonctionnels.
   - Variations sur les renormalisations des taux de polymérisation.
   - Impact des phénomènes de nucléation.

References

[1] David F. Anderson and Thomas G. Kurtz, *Stochastic analysis of biochemical systems*, Mathematical Biosciences Institute Lecture Series. Stochastics in Biological Systems, vol. 1, Springer, Cham; MBI Mathematical Biosciences Institute, Ohio State University, Columbus, OH, 2015.

[2] Marie Doumic, Sarah Eugène, and Philippe Robert, *Asymptotics of stochastic protein assembly models*, SIAM Journal on Applied Mathematics **76** (2016), no. 6, 2333–2352.

[3] Vincent Fromion, Emanuele Leoncini, and Philippe Robert, *Stochastic gene expression in cells: A point process approach*, SIAM Journal on Applied Mathematics **73** (2013), no. 1, 195–211.

[4] T.G. Kurtz, *Averaging for martingale problems and stochastic approximation*, Applied Stochastic Analysis, US-French Workshop, Lecture notes in Control and Information sciences, vol. 177, Springer Verlag, 1992, pp. 186–209.

[5] Nicolaas Godfried Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, vol. 1, Elsevier, 1992.

Probabilités et Analyse

PARTIE I : **L, Zambotti** Rough Paths et applications aux équations différentielles stochastiques

Le but de ce cours est de donner une présentation synthétique mais complète de l'approche *rugueuse* à l'analyse stochastique, qui a été développée depuis 1998 par T. Lyons, M. Gubinelli, A.M. Davie et d'autres. Cette approche est alternative à la méthode basée sur le calcul stochastique classique et permet de donner une réponse (surprenante) à la question de la continuité de l'application dite d'Itô qui associe à la trajectoire d'un mouvement brownien la trajectoire de la solution d'une équation différentielle stochastique. On expliquera à la fin du cours comment ces idées très novatrices ont été appliquées par M. Hairer au cadre beaucoup plus complexe des équations aux dérivées partielles stochastiques avec la théorie des structures de régularité.

PARTIE II : **M. Tomasevic** Processus de type McKean-Vlasov et EDP Paraboliques

textbfObjectifs : Dans ce cours nous étudierons les liens entre les processus (diffusions) non linéaires de type McKean-Vlasov et les EDP paraboliques non-linéaires. L'objectif principal est d'introduire toutes les notions de base pour pouvoir ensuite étudier la *propagation du chaos* d'un système de particules en interaction vers sa limite champ-moyen identifiée comme étant un processus de McKean-Vlasov. Nous verrons comment les techniques d'analyse d'EDP et du calcul stochastique se combinent dans ce contexte. Le cours commencera par traiter des interactions régulières et markoviennes entre particules. On présentera aussi divers modèles venant de la biologie, de la physique, de la finance où les interactions sont singulières et même non markoviennes. Ces modèles posent des problèmes très actuels en recherche et on introduira quelques techniques récentes pour les aborder.

Pré-requis : Cours "Calcul Stochastique" du 1er semestre
Quelques références :

[1] I. Karatzas, and S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, second ed., vol. 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] A-S. Sznitman, Topics in propagation of chaos, In: "Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989", volume 1464 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1991, 165–251.
[3] D. Talay and M. Tomasevic, A new McKean–Vlasov stochastic interpretation of the parabolic–parabolic Keller–Segel model: The one-dimensional case, Bernoulli 26 (2020), 1323–1353.
[4] N. Fournier and B. Jourdain, Stochastic particle approximation of the Keller–Segel equation and two-dimensional generalization of Bessel processes, Ann. Appl. Probab. 27 (2017), 2807–2861.

PARTIE III : **L. Dumaz** Opérateurs aléatoires.

Depuis les travaux du physicien Anderson dans les années 50, la localisation dans des systèmes désordonnés a été l'objet d'une importante littérature. D'un point de vue mathématique, la question est de savoir si l'opérateur auto-adjoint représentant l'hamiltonien du système est purement ponctuel ou s'il contient une partie continue. Parallèlement, la théorie des matrices aléatoires s'est développée suite aux travaux de Wigner, qui a observé que les niveaux d'énergie d'atomes lourds est bien modélisée par les valeurs propres de grandes matrices aléatoires. Les études se concentrent dans ce cas sur la répartition statistique des valeurs propres de ces grandes matrices et en particulier la répulsion entre celles-ci. L'objet de ce cours est l'étude d'opérateurs aléatoires provenant de ces deux théories. Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs de Sturm Liouville généralisés du premier ou deuxième ordre. Nous expliquerons quels opérateurs apparaissent dans ces modèles puis nous étudierons certaines de leurs propriétés spectrales notamment grâce à des outils de calcul stochastique. Les notions importantes de la théorie des opérateurs auto-adjoints non bornés seront rappelées dans les premiers cours (elles ne sont donc pas un prérequis nécessaire à ce cours).