

ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Exercice 1 (Couples à densité). Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$ dans chacun des cas suivants :

1. (X, Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-y}\mathbf{1}_{(0 < x < y)}$.
2. (X, Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x, y) = xe^{-xy}\mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)\mathbf{1}_{(1, \infty)}(y)$.
3. (X, Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x, y) = 4\frac{y}{x^3}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(0,x^2)}(y)$.
4. (X, Y) est uniformément distribué sur le disque unité.
5. $X = \min\{U_1, \dots, U_n\}$ et $Y = \max\{U_1, \dots, U_n\}$ avec U_1, \dots, U_n i.i.d. de loi $\mathcal{U}(0, 1)$.

Exercice 2 (Couple mixte). Soient $a, b > 0$, et (N, X) un v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{P}(N = n, X \leq t) = \frac{a^n b}{n!} \int_0^t x^n e^{-(a+b)x} dx \quad (n \in \mathbb{N}, t \geq 0).$$

1. Déterminer les lois marginales de N et X .
2. Calculer $\mathbb{E}[g(X)|N]$ pour tout $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et en déduire $\mathbb{E}[X|N]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{N=n}|X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\mathbb{E}[N|X]$.

Exercice 3 (Exponentielles). Soient X, Y indépendantes et de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$.

1. Quelles sont les lois de $U := \min\{X, Y\}$ et $V := \max\{X, Y\}$? Que vaut $U + V$?
2. Calculer $\mathbb{E}[U|X]$, $\mathbb{E}[X|U]$, $\mathbb{E}[V|X]$ et $\mathbb{E}[X|V]$.

Exercice 4 (Un terme sachant la somme). Calculer $\mathbb{E}[X|X + Y]$ dans les cas suivants :

1. X et Y sont indépendantes avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ ($\lambda, \mu > 0$).
2. X et Y sont indépendantes avec $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ ($m, n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$).
3. X et Y sont indépendantes avec $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$ ($r, s, \lambda > 0$).
4. X et Y sont indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}; \sigma, \tau > 0$).

Exercice 5 (Classique). Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[f(S_n)|X_1, \dots, X_{n-1}]$ lorsque $f(x) = x, x^2, x^3, \exp(x), \cos(x)$ et $\exp(-x^2)$.

Exercice 6 (Marche aléatoire). Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a.i.i.d. dans L^1 , et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n | S_m]$ pour tout $n, m \geq 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1 | S_n, S_{n+1}, \dots]$ pour tout $n \geq 1$. Que dire lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 7 (Variance conditionnelle). Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. On pose $\text{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2 | \mathcal{G}]$. Montrer que

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{G})] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

Exercice 8 (Identité de Wald). Calculer l'espérance et la variance de $Z := X_1 + \dots + X_T$, où les $(X_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d. dans L^2 , et T est dans L^2 , à valeurs dans \mathbb{N} , indépendante de $(X_k)_{k \geq 1}$.

Exercice 9 (Signe). Soit X une v.a. et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculer $\mathbb{E}[h(X) | |X|]$ lorsque X est symétrique (i.e. $-X \stackrel{\text{(loi)}}{=} X$), puis dans le cas général.

Exercice 10 (Indépendance). Soient X, Y, Z des v.a. réelles, avec X intégrable.

1. Montrer que si Z est indépendant de (X, Y) , alors $\mathbb{E}[X|Y, Z] = \mathbb{E}[X|Y]$.
2. Construire un contre-exemple lorsque l'on suppose simplement Z indépendant de X .

Exercice 11 (Cas gaussien).

1. Calculer $\mathbb{E}[\langle Z, x \rangle | \langle Z, y \rangle]$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$.
2. Soit (X, Y) un couple gaussien. Exprimer $\mathbb{E}[X|Y]$ en fonction des paramètres.

Exercice 12 (Problème). Soient X, Y des v.a. intégrables telles que $\mathbb{E}[X|Y] \leq Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] \leq X$ presque-sûrement. Le but est de démontrer que $X = Y$ presque-sûrement.

1. Montrer que les inégalités apparaissant dans l'hypothèse sont en fait des égalités.
2. On suppose $X, Y \in L^2$. Calculer $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ et conclure.
3. On suppose $X, Y \geq 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X \wedge n | Y \wedge n] \leq Y \wedge n$ pour tout n et conclure.
4. On revient au cas général. Montrer que $\mathbb{E}[X_+ | Y_+] \geq Y_+$, et conclure.
5. Retrouver le résultat en montrant directement que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(Y - X)\mathbf{1}_{(X > \theta, Y > \theta)}] = \mathbb{E}[(X - Y)\mathbf{1}_{(X > \theta \geq Y)}].$$