Vecteurs gaussiens

Exercice 1 (Un triplet gaussien). Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$\Gamma := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur gaussien (X, Y, Z) de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ si et seulement si $a \geq 5$. Dans toute la suite, on supposera cette condition vérifiée.
2. Pour quelles valeurs de a le vecteur (X, Y, Z) admet-il une densité ?
3. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ y a-t-il indépendance entre $X + \lambda Y$ et $X - \lambda Y$?
4. Supposons $a = 5$. Montrer que $X - 2Y + Z = 0$ presque-sûrement.

Exercice 2 (Maximum). Soit $(X, Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$ avec $\rho \in [-1, 1]$. On veut montrer :

$$\mathbb{E}\left[\max\left(X, Y\right)\right] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$

1. Traiter d'abord le cas particulier où $\rho = 0$.
2. On suppose ici que $\rho > 0$. Soit (U, V, W) un triplet gaussien standard. Montrer que le couple $(U\sqrt{\rho} + V\sqrt{1-\rho}, U\sqrt{\rho} + W\sqrt{1-\rho})$ a même loi que (X, Y), puis conclure.
3. On suppose maintenant que $\rho < 0$. On se donne une v.a. gaussienne standard Z indépendante de (X, Y) et un réel $\lambda \in (0, 1)$. On pose :
$$X' := \sqrt{1-\lambda}Z + \sqrt{\lambda}X, \qquad Y' := \sqrt{1-\lambda}Z + \sqrt{\lambda}Y.$$
Montrer que (X', Y') est un couple gaussien dont on précisera les paramètres, et conclure.
4. Retrouver directement le résultat en calculant $\mathbb{E}[\max(X, Y) \pm \min(X, Y)]$.

Exercice 3 (Convergence en loi). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs gaussiens de même dimension, de moyennes $(m_n)_{n\geq 1}$ et covariances $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi si et seulement si $(m_n)_{n\geq 1}$ et $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ convergent. Quelle est alors la loi limite ?

Exercice 4 (Méthode de Box-Muller). Soient U, V indépendantes et de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. On pose

$$X := \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \quad \text{et} \quad Y := \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V).$$

1. Quelles sont les lois de $X^2 + Y^2$ et de Y/X ?
2. Montrer que le couple (X, Y) est gaussien standard.

Exercice 5 (Indépendance). Soit X un vecteur gaussien de dimension d, centré, de matrice de covariance Γ. Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$ deux matrices. On définit $Y = AX$ et $Z = BX$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si la matrice $A\Gamma B^\top$ est nulle.

Exercice 6 (Isotropie). Soient X, Y, Z des variables i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Trouver la loi de (U, V, W), avec

$$U \ := \ \frac{1}{3}\left(2X - 2Y + Z\right), \quad V \ := \ \frac{1}{3}\left(X + 2Y + 2Z\right); \quad W \ := \ \frac{1}{3}\left(2X + Y - 2Z\right).$$

Exercice 7 (Décorrélation). Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$. On pose $Y_a := X\mathbf{1}_{\{|X|<a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|\geq a\}}$.

1. Montrer que Y_a est une variable gaussienne dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que X et Y_a ne sont pas indépendante.
3. Montrer pourtant que $\mathrm{Cov}(X, Y_a) = 0$ pour une valeur de a bien choisie.

Exercice 8 (Moyenne et variance empiriques). Soient $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et

$$Z \ := \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad\qquad V \ := \ \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Z)^2.$$

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Montrer que $(Z, X_1 - Z, \cdots, X_n - Z)$ est un vecteur gaussien que l'on précisera.
3. Montrer que les variables aléatoires Z et V sont indépendantes.
4. Exprimer $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$ à l'aide de $Z - \mu, V$ et n.
5. En déduire l'espérance, la fonction caractéristique puis la loi de V.

Exercice 9 (Tirages indépendants). Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ des variables i.i.d. à valeurs dans $\{1, \ldots, d\}$. On note $p_j := \mathbb{P}(Y_1 = j)$ pour $1 \leq j \leq d$, et on pose pour tout $n \geq 1$,

$$N_j^n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(Y_k = j)}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur gaussien Z, dont on donnera les paramètres, tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}(N_j^n - np_j)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \|Z\|^2.$$

Exercice 10 (Un peu de calcul). Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$. Le but de cet exercice est d'établir la formule suivante : pour toute matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{X^\top S X}{2}}\right] \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\det(I - \Gamma S)}} & \text{si } I - \Gamma S \text{ est définie positive} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier cette formule dans le cas $d = 1$.
2. Traiter ensuite le cas où d est quelconque, mais S est diagonale et $\Gamma = \mathrm{Id}$.
3. Passer au cas où d et S sont quelconques, mais $\Gamma = \mathrm{Id}$.
4. Conclure dans le cas général.