EXERCICES-TYPE CORRIGÉS

Exercice 1 (Application classique du lemme des classes monotones). Soient $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. On pose

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} \colon \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{M}$ est une classe monotone.
2. En déduire le résultat suivant : pour établir que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$, il suffit de montrer que

$$\forall A \in \mathcal{C}, \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A),$$

pour un sous-ensemble $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ vérifiant certaines hypothèses que l'on précisera.

3. Conclure que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.

1. Vérifions que $\mathcal{M}$ satisfait les trois axiomes d'une classe monotone. D'abord, on a bien $\Omega \in \mathcal{M}$, puisque $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{Q}(\Omega) = 1$ par définition d'une mesure de probabilité. Ensuite, si $A, B \in \mathcal{M}$ vérifient $A \subseteq B$, alors B est l'union disjointe de A et $B \setminus A$ et donc

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(B \setminus A) = \mathbb{Q}(B) - \mathbb{Q}(A).$$

Mais l'hypothèse $A, B \in \mathcal{M}$ assure que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{Q}(B)$. On conclut que $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{Q}(B \setminus A)$, c'est-à-dire $B \setminus A \in \mathcal{M}$. Enfin, soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'élements de $\mathcal{M}$, et soit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Par continuité séquentielle croissante, on a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(A) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mathbb{Q}(A_n).$$

Mais pour tout $n \geq 1$, l'hypothèse $A_n \in \mathcal{M}$ nous assure que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{Q}(A_n)$. On conclut aussitôt que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{M}$.

2. Considérons un sous-ensemble quelconque $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, et supposons que

$$\forall A \in \mathcal{C}, \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A). \tag{1}$$

Cela signifie que la classe monotone $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{C}$. Si l'on suppose en outre que

$$\mathcal{C} \text{ est stable par intersections finies,} \tag{2}$$

le lemme des classes monotones assure que $\mathcal{M}$ contient $\sigma(\mathcal{C})$. Si l'on ajoute que

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}, \tag{3}$$

alors on voit que $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$. C'est la conclusion souhaitée.

3. Dans le cas particulier $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on peut prendre $\mathcal{C} = \{(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$. En effet, cette classe est bien stable par intersections finies, puisque pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, t] \cap (-\infty, t'] \quad = \quad (-\infty, t \wedge t'].$$

D'autre part, on a bien $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puisque $\sigma(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$: ces derniers peuvent s'écrire comme réunions dénombrables d'intervalles ouverts (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$, que l'on peut à leur tour écrire

$$(a, b) \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right] \setminus (-\infty, a].$$

D'après la question 2, on conclut que la fonction de répartition caractérise la loi.

Exercice 2 (Mesures à densité). Soit f une fonction mesurable positive sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu(A) := \int_E \mathbf{1}_A \, f \, \mathrm{d}\mu.$$

1. Vérifier que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
2. Montrer que pour toute fonction $h \colon E \to \mathbb{R}$ mesurable positive, on a
$$\int_E h \, \mathrm{d}\nu = \int_E hf \, \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$
3. Soit $h \colon E \to \mathbb{R}$ mesurable de signe quelconque. Montrer que $h \in L^1(E, \mathcal{A}, \nu)$ si et seulement si $hf \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et que dans ce cas, (4) est encore vérifiée.

1. D'abord, l'intégrale $\nu(A)$ est bien définie puisque la fonction $\mathbf{1}_A f$ est mesurable positive en tant que produit de telles fonctions. De plus, on a bien $\nu(\emptyset) = 0$ puisque $\mathbf{1}_\emptyset f$ est la fonction nulle. Enfin, si $A_0, A_1, \ldots$ sont des élements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a
$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_E \mathbf{1}_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right) f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E \mathbf{1}_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$
La seconde égalité est justifiée par le fait que les $(A_n)_{n \geq 0}$ sont deux-à-deux disjoints, et la troisième soit par le théorème de convergence monotone (appliqué à la suite croissante et positive $(f_N)_{N \geq 0}$ avec $f_N = \sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n} f$), soit par le théorème de Fubini (appliqué à la fonction mesurable positive $(n, x) \mapsto \mathbf{1}_{A_n}(x) f(x)$ sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card}) \otimes (E, \mathcal{A}, \mu)$).
2. D'abord, l'égalité (4) est vraie pour les fonctions de la forme $h = \mathbf{1}_A$ $(A \in \mathcal{A})$, par définition de ν. Elle s'étend ensuite aux fonctions étagées, par linéarité de l'intégrale. Enfin, dans le cas général, on sait que h est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives $(h_n)_{n \geq 1}$. Comme (4) est vraie pour les fonctions étagées, on a
$$\int_E h_n \, \mathrm{d}\nu = \int_E h_n f \, \mathrm{d}\mu$$
pour tout $n \geq 1$, et la conclusion s'obtient par passage à la limite (convergence monotone).
3. Soit $h \colon E \to \mathbb{R}$ mesurable. Les conditions $h \in L^1(E, \mathcal{A}, \nu)$ et $hf \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ expriment la finitude des intégrales $\int_E |h| \, \mathrm{d}\nu$ et $\int_E |hf| \, \mathrm{d}\mu$, respectivement. D'après la question 2, ces deux intégrales sont égales, d'où l'équivalence. Si ces intégrales sont finies, on peut écrire
$$\begin{aligned}
\int_E h \, \mathrm{d}\nu &= \int_E h^+ \, \mathrm{d}\nu - \int_E h^- \, \mathrm{d}\nu \\
&= \int_E h^+ f \, \mathrm{d}\mu - \int_E h^- f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E hf \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$
On a ici appliqué (4) à $h^{\pm}$, puis utilisé la positivité de f pour écrire $(hf)^{\pm} = h^{\pm} f$.

Exercice 3 (Intégration par parties gaussienne). Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On se propose de démontrer l'identité suivante : pour tout $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{E}\left[|h'(X)|\right] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[Xh(X)\right] = \mathbb{E}\left[h'(X)\right].$$

1. Vérifier que le membre de gauche de cette identité est bien défini.
2. Montrer que $h(x)\exp(-x^2/2) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, et conclure.

1. Remarquons tout d'abord que, quitte à remplacer $h(x)$ par $h(x) - h(0)$, on peut toujours supposer $h(0) = 0$, ce que nous ferons dorénavant. Comme h est $\mathcal{C}^1$ et $h(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|h(x)xe^{-\frac{x^2}{2}}\right| \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left|\int_0^x h'(u)\,\mathrm{d}u\right| xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^\infty \left(\int_0^x |h'(u)|\,\mathrm{d}u\right) xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^\infty \left(\int_u^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) |h'(u)|\,\mathrm{d}u \\
&\le \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\,|h'(u)|\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini dans la seconde inégalité est justifiée puisque l'intégrand est positif. L'inégalité obtenue est également valable lorsque l'intégrale porte sur $(-\infty,0)$ au lieu de $(0,+\infty)$, puisque l'on peut remplacer $h(x)$ par $h(-x)$. On conclut alors que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)x|\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} |h'(x)|\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, $\mathbb{E}\left[|Xh(X)|\right] \le \mathbb{E}\left[|h'(X)|\right]$. L'hypothèse entraîne donc bien $\mathbb{E}[|Xh(X)|] < \infty$.

2. Pour tout $0 \le x_0 \le x$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left|h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right| &= \left|h(x_0) + \int_{x_0}^x h'(u)\,\mathrm{d}u\right| e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\le \left(|h(x_0)| + \int_{x_0}^x |h'(u)|\,\mathrm{d}u\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\le |h(x_0)|\,e^{-\frac{x^2}{2}} + \int_{x_0}^x |h'(u)|\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

par décroissance de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $(0,\infty)$. En faisant $x \to \infty$ dans cette inégalité, on obtient

$$\limsup_{x\to\infty} \left|h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \le \int_{x_0}^\infty |h'(u)|\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u,$$

et ce pour tout $x_0 \ge 0$. En faisant à présent tendre $x_0 \to \infty$, on voit que $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. La limite en $-\infty$ s'obtient en remplaçant $h(x)$ par $h(-x)$. On peut désormais facilement montrer l'identité cherchée : par intégration par partie, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \left[-h(x)e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} h'(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme entre crochets est nul (question 2), et l'identité s'obtient en divisant par $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 4 (Produit gaussien). Soient W, X, Y, Z des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la fonction caractéristique de WX.
2. En déduire que $WX + YZ$ admet pour densité la fonction $f \colon x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
3. Quelle est la loi de $|WX + YZ|$?

1. L'indépendance de W et X signifie que $\mathcal{L}_{(W,X)} = \mathcal{L}_W \otimes \mathcal{L}_X$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi_{WX}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itwx} \mathcal{L}_{(W,X)}(\mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itwx} \mathcal{L}_W(\mathrm{d}w) \right) \mathcal{L}_X(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi_W(tx) \mathcal{L}_X(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

   Comme W et X ont pour loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a $\phi_W(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ et $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \phi_{WX}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)} \, \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \end{aligned}$$

2. Comme WX et YZ sont indépendantes et de même loi, on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{WX+YZ}(t) = (\phi_{WX}(t))^2 = \frac{1}{1+t^2}.$$

   Comme la fonction caractéritique caractérise la loi, il suffit maintenant de montrer que la fonction caractéristique associée à la densité f est $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-itx} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(it+1)x} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(1-it)x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right) \\ &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

3. La question précédente permet d'écrire, pour toute fonction $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h\left(|WX+YZ|\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}} h(|x|) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(|x|) e^{-|x|} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} h(x) e^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) g(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

   où $g(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ est la densité de la loi $\mathcal{E}(1)$. En conclusion, $|WX + YZ| \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice 5 (Changements de variable en dimension 2).

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi Exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$ et $U = X/Z$. Quelle est la loi du couple (Z, U) ?
2. Même question avec X, Y indépendantes de lois respectives $\Gamma(r, \lambda)$ et $\Gamma(s, \lambda)$, $r, s, \lambda > 0$. En déduire au passage la *formule des compléments* :

$$\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}\,\mathrm{d}u \quad = \quad \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

1. Par hypothèse, le couple (X, Y) admet pour densité $(x, y) \longmapsto e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-y}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$. Pour toute fonction $h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(Z,U)\right] &= \mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] \\
&= \int_{(0,\infty)^2} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) e^{-x}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,1)} h\left(z,u\right) e^{-z} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(z,u\right) f_1(z) f_2(u)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

avec $f_1(z) = ze^{-z}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)$ et $f_2(u) = \mathbf{1}_{(0,1)}(u)$. On en déduit que Z et U sont indépendantes, avec $Z \sim \Gamma(\lambda = 1, r = 2)$ et $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Détaillons un peu plus le changement de variables effectué ci-dessus : on a posé $(z,u) = g(x,y)$ avec

$$\begin{array}{cccc}
g & : & (0,\infty)\times(0,\infty) & \to & (0,\infty)\times(0,1) \\
 & & (x,y) & \mapsto & \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right).
\end{array}$$

Cette fonction est évidemment un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme, d'inverse

$$\begin{array}{cccc}
g^{-1} & : & (0,\infty)\times(0,1) & \to & (0,\infty)\times(0,\infty) \\
 & & (z,u) & \mapsto & (zu, z(1-u)).
\end{array}$$

On calcule aisément $\left|\det J_{g^{-1}}(z,u)\right| = |-uz - z(1-u)| = z$, donc $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$.

2. C'est le même changement de variables qu'à la question précédente, mais avec cette fois

$$(x,y) \quad \mapsto \quad \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1}y^{s-1}e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

pour la densité du couple (X, Y). Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(Z,U)\right] &= \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_{(0,\infty)^2} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{r-1}y^{s-1}e^{-\lambda(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_{(0,\infty)\times(0,1)} h\left(z,u\right) z^{r+s-1}e^{-\lambda z}u^{r-1}(1-u)^{s-1}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(z,u\right) f_1(z) f_2(u)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

avec $f_1(z) = \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)} z^{r+s-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)$ et $f_2(u) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} u^{r-1}(1-u)^{s-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(u)$. On remarque que f_1 est la densité de la loi $\Gamma(r+s, \lambda)$. En prenant $h = 1$, on obtient exactement la formule des compléments annoncée. On conclut que Z et U sont indépendantes, avec $Z \sim \Gamma(r+s, \lambda)$ et U de densité f_2.

Remarque culturelle : la loi de U s'appelle loi Beta de paramètre (r, s), et se note $\beta(r, s)$.

Exercice 6 (Maximum d'exponentielles). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de loi $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, et on cherche à démontrer que

$$\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 1.$$

1. Montrer que la convergence a lieu en probabilité.
2. Montrer que la convergence a lieu presque-sûrement si l'on remplace n par 2^n.
3. Conclure par un argument de comparaison.

1. Pour tout $a > 0$ et $n \geq 1$, on peut écrire par indépendance

$$\mathbb{P}(M_n \leq a \ln n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq a \ln n\}\right) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq a \ln n) \quad = \quad \left(1 - \frac{1}{n^a}\right)^n.$$

Comme $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \to 0$, on voit que lorsque $a > 0$ est fixé et que $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq a \ln n) \quad = \quad \exp\left\{-n^{1-a} + o(n^{1-a})\right\}. \tag{5}$$

En particulier, $\mathbb{P}(M_n \leq a \ln n)$ tend vers 1 si $a > 1$, et vers 0 si $a < 1$. C'est précisément ce que signifie la convergence en probabilité $\frac{M_n}{\ln n} \to 1$.

2. Soit $\varepsilon \in (0,1)$ fixé. En prenant $a = 1 \pm \varepsilon$ et en remplaçant n par 2^n dans (5), on voit que

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_{2^n}}{n \ln 2} \leq 1 - \varepsilon\right) \quad = \quad \exp\left\{-2^{n\varepsilon}(1 + o(1))\right\}, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{M_{2^n}}{n \ln 2} > 1 + \varepsilon\right) \quad = \quad 2^{-n\varepsilon}(1 + o(1)).$$

Il est donc clair que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_{2^n}}{n \ln 2} - 1\right| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Le premier lemme de Borel-Cantelli nous garantit alors que l'événement

$$B_\varepsilon \;:=\; \left\{\exists n_0 \geq 1 \colon \forall n \geq n_0, \left|\frac{M_{2^n}}{n \ln 2} - 1\right| \leq \varepsilon\right\}$$

a probabilité 1. Il en est donc de même de $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}$, qui est exactement $\{\frac{M_{2^n}}{n \ln 2} \to 1\}$.

3. Soit $n \geq 1$, et soit $k_n = \lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \rfloor$, de telle sorte que $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$. Puisque les suites $(M_n)_{n\geq 1}$ et $\ln n$ sont croissantes, on peut écrire

$$\frac{M_{2^{k_n}}}{(k_n+1)\ln 2} \quad \leq \quad \frac{M_n}{\ln n} \quad \leq \quad \frac{M_{2^{k_n+1}}}{k_n \ln 2}$$

Faisons maintenant tendre $n \to \infty$: on a $k_n \to \infty$, donc la question précédente garantit que les termes de gauche et droite tendent chacun vers 1 presque-sûrement. Ainsi,

$$\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 1.$$

Exercice 7 (Formule d'inversion de Lévy). On se propose de montrer que si $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors la variable X admet pour densité la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\phi_X(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que pour tous $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a $e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iut-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tous $\sigma > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iyt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\phi_X(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que pour toute fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, on a
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(y)\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{d}y \xrightarrow[\sigma\to 0+]{} \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$
4. Vérifier que le membre de gauche vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X+\sigma s)]e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s$ et conclure.

1. Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma^2})$, on sait que $\phi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$. C'est exactement l'identité cherchée !
2. L'identité précedente est valable pour tout $u \in \mathbb{R}$. En prenant $u = X - y$, on a p.s.
$$e^{-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(X-y)t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
Il suffit alors de prendre l'espérance, puis d'appliquer Fubini pour intervertir $\mathbb{E}$ et $\int$ dans le membre de droit. Tout cela est parfaitement justifié puisque
$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|e^{i(X-y)t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right|\right]\mathrm{d}t = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1 < \infty.$$
3. D'après ce qui précède, on a pour tout $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(y)\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} h(y)e^{-iyt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\phi_X(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$
Pour conclure, il suffit de faire $\sigma \to 0^+$ et d'invoquer le TCD, justifié grâce à la domination
$$\left|h(y)e^{-iyt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\phi_X(t)\right| \le |h(y)\phi_X(t)|,$$
avec $h(y)\phi_X(t) \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}y)$ car h et ϕ_X sont dans L^1. Cette condition justifie aussi l'application du théorème de Fubini pour intégrer par rapport à t, y dans l'ordre voulu.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on peut effectuer le changement de variable $s = (y-x)/\sigma$ pour écrire
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(x+s\sigma)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s.$$
Cette identité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut intégrer par rapport à $\mathbb{P}_X$ pour avoir
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(y)\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[h(X+s\sigma)\right]e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s.$$
Lorsque $\sigma \to 0$, le membre de droit tend vers $\mathbb{E}[h(X)]$ par continuité de h et convergence dominée. Pour justifier cela, ainsi que l'interversion entre $\mathbb{E}$ et $\int$, il suffit de noter que
$$\left|h(X+s\sigma)e^{-\frac{s^2}{2}}\right| \le \|h\|_\infty e^{-\frac{s^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R}).$$
En combinant cela avec la question précédente, on voit que $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)\,\mathrm{d}y$. Comme ceci est vrai pour tout $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on peut conclure que X admet f pour densité.

Exercice 8 (Méthode des moments). Soit $M > 0$ une constante.

1. Montrer que la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $[-M, M]$ est entièrement déterminée par la suite des moments $(\mathbb{E}[X^k])_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Pour des variables aléatoires $X, X_1, X_2, \ldots$ à valeurs dans $[-M, M]$, établir l'équivalence

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[X_n^k\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

3. Soit $f(x) := \frac{\sin(2\pi \ln x)}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. À l'aide de f, construire une infinité de lois distinctes qui ont les mêmes moments.

1. On sait que la loi de X est déterminée par ϕ_X. Il suffit donc de montrer que ϕ_X est à son tour déterminée par $(\mathbb{E}[X^k])_{k\in\mathbb{N}}$. C'est le cas ici puisque pour $t \geq 0$, on peut écrire

$$\Phi_X(t) \quad = \quad \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \; = \; \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{(itX)^k}{k!}\right] \; = \; \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^k \mathbb{E}[X^k]}{k!}. \tag{6}$$

L'utilisation du théorème de Fubini dans la dernière égalité est justifiée puisque

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0} \left|\frac{(it)^k X^k}{k!}\right|\right] \quad \leq \quad \sum_{k\geq 0} \frac{|t|^k M^k}{k!} \; = \; e^{M|t|} \; < \infty.$$

2. Pour $\Longrightarrow$, il suffit de remarquer que le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'une v.a. X à valeurs dans $[-M, M]$ peut s'écrire $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[h(X)]$ avec h continue bornée, par exemple :

$$h(x) = \begin{cases} -M & \text{si } x < -M \\ x^k & \text{si } x \in [-M, M] \\ M & \text{si } x > M. \end{cases}$$

Pour $\Longleftarrow$, on montre que $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour cela, on applique (6) à X_n et on fait $n \to \infty$. Le passage à la limite sous la somme est justifié par la domination

$$\left|\frac{(it)^k \mathbb{E}\left[X_n^k\right]}{k!}\right| \quad \leq \quad \frac{|t|^k M^k}{k!}.$$

3. D'abord, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\, \mathrm{d}x$ est bien définie puisque $\int_{\mathbb{R}} |x^k f(x)| \mathrm{d}x$ est majorée par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{k-1} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ky} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y \; = \; e^{\frac{k^2}{2}},$$

où l'on a effectué le changement de variable $y = \ln x$ et reconnu la densité de $\mathcal{N}(k, 1)$. On peut maintenant calculer $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0$ par le changement de variable $y = (\ln x) - k$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{e^{\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi(y + k)) e^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y,$$

qui vaut bien zéro puisque $\sin(2\pi(y + k)) = \sin(2\pi y)$ est impaire et $\exp(-y^2/2)$ est paire.

4. Pour tout $\theta \in [-1, 1]$, la fonction $g_\theta := \frac{1+\theta \sin(2\pi \ln x)}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ est clairement positive, et les deux calculs ci-dessus montrent que pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\mathbb{R}} x^k g_\theta(x)\, \mathrm{d}x \quad = \quad e^{\frac{k^2}{2}}.$$

En particulier, le cas $k = 0$ montre que g_θ est une densité. Ainsi, $(g_\theta)_{\theta\in[-1,1]}$ est une famille infinie de densités qui ont toutes les mêmes moments. Il n'y a pas de contradiction avec la question 1, puisque les variables correspondantes ne sont pas à valeurs dans un compact.

Exercice 9 (Vecteurs gaussiens et estimateurs). Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et

$$Z := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Z)^2.$$

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Montrer que $(Z, X_1 - Z, \cdots, X_n - Z)$ est un vecteur gaussien que l'on précisera.
3. Montrer que les variables aléatoires Z et V sont indépendantes.
4. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors Y^2 suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.
5. Exprimer $S := \sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$ à l'aide de $Z - \mu$, V et n.
6. Déduire des questions précédentes la fonction caractéristique puis la loi de V.

1. Z est une combinaison linéaire de v.a. gaussiennes indépendantes, c'est donc encore une v.a. gaussienne. Ses moyenne et variance s'obtiennent directement : $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
2. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. Alors par définition, on a

$$\lambda_0 Z + \lambda_1(X_1 - Z) + \cdots + \lambda_n(X_n - Z) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left\{\lambda_k + \frac{\lambda_0}{n} - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}\right\} X_k,$$

qui est bien une v.a. gaussienne en tant que somme de v.a. gaussiennes indépendantes. Ainsi, le vecteur $(Z, X_1 - Z, \ldots, X_n - Z)$ est gaussien. On a $\mathbb{E}[Z] = \mu$, $\mathrm{Var}(Z) = \frac{\sigma^2}{n}$ et

$$\mathbb{E}[X_i - Z] = 0, \qquad \mathrm{Cov}(X_i - Z, Z) = 0, \qquad \mathrm{Cov}(X_i - Z, X_j - Z) = \sigma^2 \mathbf{1}_{(i=j)} - \frac{\sigma^2}{n}.$$

3. Comme le vecteur $(Z, X_1 - Z, \ldots, X_n - Z)$ est gaussien, le fait que $\mathrm{Cov}(X_i - Z, Z) = 0$ pour tout $1 \le i \le n$ garantit l'indépendance entre Z et $W := (X_1 - Z, \ldots, X_n - Z)$. En particulier, Z est indépendant de $g(W)$, pour tout choix d'une fonction mesurable $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La fonction continue $g(w_1, \ldots, w_n) = \frac{w_1^2 + \cdots + w_n^2}{n-1}$ fournit la réponse cherchée.
4. Pour toute fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive, on peut écrire :

$$\mathbb{E}[h(Y^2)] \;=\; \int_{\mathbb{R}} h(y^2)\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}y \;=\; 2\int_0^{\infty} h(y^2)\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{\infty} h(x)\frac{e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2x\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi Y^2 admet pour densité la fonction $x \mapsto Cx^{r-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ avec $r = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, $C = \frac{\lambda^r}{\sqrt{\pi}}$. En comparant à la densité de $\Gamma(r, \lambda)$, on voit que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $Y^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$.
5. En décomposant $X_i - \mu$ comme $(X_i - Z) + (Z - \mu)$, on obtient

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left\{(X_i - Z)^2 + 2(X_i - Z)(Z - \mu) + (Z - \mu)^2\right\} \;=\; (n-1)V + n(Z - \mu)^2.$$

6. Il découle de la question 3 que $(n-1)V$ et $n(Z - \mu)^2$ sont indépendantes. En combinant cela avec l'identité obtenue à la question 5, on trouve que pour tout $t \ge 0$,

$$\phi_S(t) \;=\; \phi_{(n-1)V}(t) \times \phi_{n(Z-\mu)^2}(t) \;=\; \phi_V((n-1)t) \times \phi_{n(Z-\mu)^2}(t)$$

D'après la question 4, $n(Z - \mu)^2$ et les $(X_i - \mu)^2$ suivent toutes la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$, qui a comme fonction caractéristique $\phi(t) = (1 - 2i\sigma^2 t)^{-\frac{1}{2}}$. Comme les $(X_i - \mu)^2$ sont indépendantes, $\phi_S(t) = (\phi(t))^n$. En réinsérant dans l'identité ci-dessus, on voit que

$$\phi_V(t) = \left(\phi\left(\frac{t}{n-1}\right)\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{2i\sigma^2 t}{n-1}\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$.

Exercice 10 (Espérance conditionnelle). Soient $a, b > 0$ et (N, X) à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{P}(N = n, X \leq t) \quad = \quad \frac{a^n b}{n!} \int_0^t x^n e^{-(a+b)x} dx \qquad (n \in \mathbb{N}, t \geq 0).$$

1. Déterminer la loi de N.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[g(X)|N]$ pour tout $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable et en déduire $\mathbb{E}[X|N]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(N=n)}|X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\mathbb{E}[N|X]$.

1. Pour $t \geq 0$ fixé, les événements $(\{N = n, X \leq t\})_{n \in \mathbb{N}}$ forment une partition dénombrable de $\{X \leq t\}$, donc par $\sigma-$additivité de $\mathbb{P}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq t) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n, X \leq t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n b}{n!} \int_0^t x^n e^{-(a+b)x} dx \\ &= \quad \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} b e^{-(a+b)x} dx \;=\; \int_0^t b e^{-bx} dx \;=\; 1 - e^{-bt}.\end{aligned}$$

Notons que le théorème de Fubini s'applique sans problème ici puisque l'intégrand est positif. On reconnaît alors la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(b)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $(\{N = n, X \leq t\})_{t \geq 0}$ forme une famille croissante d'événements dont la réunion est $\{N = n\}$. Par continuité séquentielle croissante de $\mathbb{P}$, on peut écrire

$$\mathbb{P}\left(N = n\right) \quad = \quad \lim_{t \to \infty} \uparrow \mathbb{P}(N = n, X \leq t) \;=\; \frac{a^n b}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-(a+b)x} dx \;=\; \frac{a^n b}{(a+b)^{n+1}},$$

car $x \mapsto \frac{(a+b)^{n+1} x^n e^{-(a+b)x}}{n!} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ est une densité (loi $\Gamma(n+1, a+b)$). Ainsi, $N \sim \mathcal{G}(\frac{b}{a+b})$

3. Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t | N = n) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X \leq t, N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} \quad = \quad \int_0^t \frac{(a+b)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(a+b)x} dx.$$

Vu comme fonction de t, le membre de droit est la fonction de répartition de la loi $\Gamma(n+1, a+b)$. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $\{N = n\}$ est $\Gamma(n+1, a+b)$. Autrement dit, pour toute fonction g mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(X)|N = n] \quad = \quad \int_0^{\infty} g(x) \frac{(a+b)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(a+b)x} dx.$$

Cette formule est en fait la généralisation de la précédente (cas $g = \mathbf{1}_{(-\infty, t]}$) par la machinerie usuelle (classes monotones, linéarité, convergence monotone). Enfin, $\mathbb{E}[g(X)|N]$ s'obtient en remplaçant n par N. En particulier, pour $g(x) = x$, on trouve

$$\mathbb{E}[X|N] \quad = \quad \frac{N+1}{a+b}.$$

4. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable. D'après les deux questions précédentes, nous avons

$$\mathbb{E}[g(X)\mathbf{1}_{(N=n)}] \quad = \quad \int_0^{\infty} g(x) \frac{a^n b}{n!} x^n e^{-(a+b)x} dx \;=\; \mathbb{E}\left[g(X) \frac{(aX)^n e^{-aX}}{n!}\right].$$

Par définition, cela signifie que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(N=n)}|X] = \frac{(aX)^n e^{-aX}}{n!}$. Enfin, notons que

$$\mathbb{E}[g(X)N] \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}\left[g(X)\mathbf{1}_{(N=n)}\right] \;=\; \mathbb{E}\left[g(X) \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(aX)^n e^{-aX}}{n!}\right] \;=\; \mathbb{E}\left[g(X) aX\right].$$

(On a utilisé Fubini-Tonelli et reconnu l'espérance d'une v.a. Poisson). Ainsi $\mathbb{E}[N|X] = aX$.

Exercice 11 (Martingales). Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dans chacun des cas suivants, montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}-$martingale.

(1) $M_n = S_n$	(2) $M_n = S_n^2 - n$	(3) $M_n = S_n^3 - 3nS_n$
(4) $M_n = \exp(S_n - \frac{n}{2})$	(5) $M_n = \cos(S_n)e^{\frac{n}{2}}$.	

Rappelons quelques propriétés de l'espérance conditionnelle, valables dès que les espérances ci-dessous ont un sens :

(i) Linéarité : $\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y|\mathcal{F}] = \lambda \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mu \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

(ii) Cas mesurable : si X est $\mathcal{F}-$mesurable alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$.

(iii) Cas indépendant : si X est indépendante de $\mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.

(iv) Sortir ce qui est mesurable : si X est $\mathcal{F}-$mesurable alors $\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

1. D'abord, S_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable car $S_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ avec $h(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ borélienne (car continue). Ensuite, S_n est intégrable puisque sa loi est $\mathcal{N}(0,n)$. Enfin, en décomposant $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ avec S_n $\mathcal{F}_n-$mesurable et X_{n+1} indépendante de $\mathcal{F}_n$, on déduit des propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessous la propriété de martingale :
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n.$$
2. Comme $x \mapsto x^2$ est borélienne, on déduit de ce qui précède que S_n^2 est $\mathcal{F}_n-$mesurable. De plus, $\mathbb{E}[S_n^2] = n < \infty$. Enfin, en développant le carré et en utilisant (i)-(ii)-(iii)-(iv), on a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = S_n^2 + 1.$$
Ainsi $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
3. Ici encore, S_n^3 est $\mathcal{F}_n-$ mesurable car $x \mapsto x^3$ est borélienne, et elle S_n^3 est intégrable car la loi gaussienne admet des moments de tout ordre. Ensuite en développant le cube, on a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}^3|\mathcal{F}_n] = S_n^3 + 2S_n^2\mathbb{E}[X_{n+1}] + 3S_n\mathbb{E}[X_{n+1}^2] + \mathbb{E}[X_{n+1}^3] = S_n^3 + 3S_n,$$
où l'on a utilisé (i)-(ii)-(iii)-(iv) et le fait que $\mathbb{E}[S_{n+1}^k] = 0$ pour k impair par parité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On en déduit aisément que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
4. Rappelons que pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on a
$$\mathbb{E}\left[e^X\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{x - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = e^{\frac{\sigma^2}{2}},$$
où l'on a reconnu la densité de $\mathcal{N}(\sigma^2, \sigma^2)$. Ainsi $\mathbb{E}[e^{S_n}] = e^{\frac{n}{2}} < \infty$ et $\mathbb{E}[e^{X_{n+1}}] = e^{\frac{1}{2}}$. En appliquant (iv), on voit que
$$\mathbb{E}[e^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = e^{S_n}\mathbb{E}[e^{X_{n+1}}] = e^{S_n}e^{\frac{1}{2}}.$$
On en déduit aussitôt que $(e^{S_n - \frac{n}{2}})_{n\geq 0}$ est une martingale.
5. En raisonnant comme dans le calcul précédent, on a
$$\mathbb{E}\left[e^{iS_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] = e^{iS_n}\mathbb{E}\left[e^{iX_{n+1}}\right] = e^{iS_n - \frac{1}{2}},$$
où l'on a reconnu la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En passant aux parties réelles, on en déduit que $\mathbb{E}\left[\cos(S_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] = \cos(S_n)e^{-\frac{1}{2}}$, et la propriété de martingale cherchée en découle aussitôt. On aurait aussi pu utiliser la formule trigonométrique
$$\cos(S_{n+1}) = \cos(S_n)\cos(X_{n+1}) - \sin(S_n)\sin(X_{n+1}),$$
et conclure à l'aide des propriétés (i)-(iii)-(iv) et de la parité de $\mathcal{N}(0,1)$.