Exercices bonus sur les convergences et le lemme de Borel–Cantelli

1. Soient A_n, $n \geq 1$, des événements quelconques. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Solution de l'exercice 1. Par définition, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k)$, qui vaut [1] $\lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k)$. Il reste alors de remarquer que pour tout n, $\mathbb{P}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq \mathbb{P}(A_n)$. □

2. Supposons que $X_n \to X$ en probabilité. Montrer que $X_{n^2+6} - X_n \to 0$ en probabilité.

Solution de l'exercice 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_{n^2+6} - X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n^2+6} - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) \to 0.$ [2] □

3. Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires continues. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la densité de X_n est $f_{X_n}(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$. Étudier, pour X_n, convergence en probabilité et convergence dans L^p.

Solution de l'exercice 3. Il n'y a pas de convergence dans L^p car X_n n'admet pas de moment d'ordre 1.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n| < \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(n\varepsilon) - \frac{1}{\pi} \arctan(-n\varepsilon) \to \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \times (-\frac{\pi}{2}) = 1$. D'où : $X_n \to 0$ en probabilité. □

4. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$. Montrer que $X_n \to X$ p.s.

Solution de l'exercice 4. C'est fait en TD Feuille 8. □

5. Soit (ε_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty$. Montrer que $X_n \to X$ p.s.

Solution de l'exercice 5. Notons $A_n := \{|X_n - X| > \varepsilon_n\}$. Par hypothèse, $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$. D'après le lemme de Borel–Cantelli, il existe $B \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(B) = 1$ tel que pour tout $\omega \in B$, on peut trouver $n_0 = n_0(\omega) < \infty$ de sorte que $|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon_n$, $\forall n \geq n_0$. Comme $\varepsilon_n \to 0$, cela implique que pour tout $\omega \in B$, $X_n(\omega) \to X(\omega)$ (quand $n \to \infty$). Puisque $\mathbb{P}(B) = 1$, ceci signifie que $X_n \to X$ p.s.

Remarque. On peut directement utiliser l'exercice précédent pour conclure. □

---

1. Si (B_n) est une suite décroissante d'événements, alors $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}(B_n)$.
2. On utilise l'inclusion $\{|\xi + \eta| > \varepsilon\} \subset (\{|\xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|\eta| > \frac{\varepsilon}{2}\})$; attention à ne pas confondre avec $\{\xi + \eta < \varepsilon\} \subset (\{\xi < \varepsilon\} \cap \{\eta < \varepsilon\})$ lorsque ξ et η sont positives.

6. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) < \infty$. Montrer que $X_n \to X$ p.s.

Solution de l'exercice 6. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r}$. Donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$. Il résulte alors de l'Exercice 4 que $X_n \to X$ p.s. $\square$

7. Montrer que $X_n \to X$ en probabilité si et seulement si $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Solution de l'exercice 7. "$\Rightarrow$" Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1}) = \mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}) + \mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}})$.

On utilise l'inégalité triviale $\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \leq 1$ pour voir que $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$.

D'autre part, si $|X_n - X| \leq \varepsilon$, alors $\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Donc $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \leq \varepsilon$.

On a ainsi prouvé que $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1}) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon$. En faisant $n \to \infty$, on obtient $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1}) \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ peut être aussi petit que nécessaire, ceci implique que $\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1}) \to 0$.

"$\Leftarrow$" Soit $\varepsilon > 0$. Si $|X_n - X| \geq \varepsilon$, alors $\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1})$, qui, d'après l'inégalité de Markov, est majorée par $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\mathbb{E}(\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1})$. D'où $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$. $\square$

8. Soient X_1, X_2, $\cdots$ des variables aléatoires à valeurs dans $[-2013, 2013]$. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $\mathbb{E}(|X_n|) \to 0$, $n \to \infty$.

Solution de l'exercice 8. "$\Rightarrow$" On a $\mathbb{E}(|X_n|) \leq 2014\, \mathbb{E}(\frac{|X_n|}{|X_n|+1})$, qui tend vers 0 d'après l'exercice précédent.[3]

"$\Leftarrow$" Convergence dans L^1 implique automatiquement convergence en probabilité. $\square$

9. Soient X_1, X_2, $\cdots$ des variables aléatoires admettant toutes un moment d'ordre 2. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, que $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\forall n \geq 1$, et que $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) \leq 0$, $n \neq m$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ dans L^2.

Solution de l'exercice 9. On peut décomposer $\mathbb{E}[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2]$ de la façon suivante : $\mathbb{E}[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} \mathbb{E}(X_iX_j)$. Par hypothèse, $\mathbb{E}(X_iX_j) \leq 0$ si $i \neq j$. Donc $\mathbb{E}[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2] \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2)$, qui tend vers 0 car $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2)$ est supposée bornée. $\square$

3. On peut également conclure en utilisant le théorème de convergence dominée (version convergence en probabilité, que l'on a vue dans le cours).

10. Supposons que $X_n \to a \in \mathbb{R}$ en probabilité. Soit f une fonction continue et bornée. Montrer que $\mathbb{E}[f(X_n)] \to f(a)$, $n \to \infty$.

Solution de l'exercice 10. Voir le cours.

Remarque. On peut également faire cet exercice “à la main" en utilisant la définition de convergence en probabilité. $\square$

Exercices bonus sur les fonctions caractéristiques

11. Soit φ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité. Lesquelles des fonctions suivantes sont encore des fonctions caractéristiques ?

(i) $\mathrm{Im}(\varphi(t))$;

(ii) $\varphi(2t)$;

(iii) $2\varphi(t)$;

(iv) $-\varphi(t)$.

Solution de l'exercice 11. Non pour (i), (iii) et (iv), car à chaque fois, la valeur de la fonction à l'origine est différente de 1.

Oui pour (ii) : si φ est la fonction caractéristique de X, alors $\varphi(2t)$ est celle de $2X$.$\square$

12. Soient X et Y des variables indépendantes, et soit $a \in \mathbb{R}$ un réel. On suppose que $P_X = \mathscr{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $P_Y = \mathscr{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, avec $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$ et $\sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0$. Posons $Z := aX$ et $W := X + Y$. Quelle est la loi de Z ? Quelle est la loi de W ?

Rappel : La loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour fonction caractéristique $\exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2)$.

Solution de l'exercice 12. Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi_Z(t) = \varphi_X(at) = \exp(\mu at - \frac{\sigma^2}{2}a^2t^2)$. Donc $P_Z = \mathscr{N}(a\mu_X, a^2\sigma_X^2)$.

Pour W, on constate, grâce à l'indépendance, que $\varphi_W(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \exp((\mu_X + \mu_Y)t - \frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2}t^2)$. Donc $P_Z = \mathscr{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$. $\square$

13. Soient X et Y des variables indépendantes suivant la même loi de Cauchy standard. Posons $Z := \frac{X+Y}{2}$. Quelle est la loi de Z ?

Rappel : La loi de Cauchy standard a pour fonction caractéristique $e^{-|t|}$.

Solution de l'exercice 13. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(\frac{t}{2})$, qui, grâce à l'indépendance, vaut $\varphi_X(\frac{t}{2})\,\varphi_Y(\frac{t}{2}) = e^{-|t|}$. Donc Z suit la loi de Cauchy standard. $\square$

14. Soient X et Y des variables indépendantes de même loi gaussienne. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Solution de l'exercice 14. On suppose que $P_X = P_Y = \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Donc $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2)$.

Soit $t := (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\varphi_{(X+Y, X-Y)}(t_1, t_2) = \mathbb{E}(e^{i(t_1(X+Y)+t_2(X-Y))}) = \mathbb{E}(e^{i(t_1+t_2)X+i(t_1-t_2)Y}).$$

Par indépendance, ceci implique que

$$\begin{aligned} \varphi_{(X+Y, X-Y)}(t_1, t_2) &= \varphi_X(t_1+t_2)\,\varphi_Y(t_1-t_2) \\ &= e^{\mu(t_1+t_2)-\frac{\sigma^2}{2}(t_1+t_2)^2}\, e^{\mu(t_1-t_2)-\frac{\sigma^2}{2}(t_1-t_2)^2} \\ &= e^{2\mu t_1 - \sigma^2(t_1^2+t_2^2)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi_{X+Y}(t_1) = \varphi_X(t_1)\,\varphi_Y(t_1) = e^{2\mu t_1 - \sigma^2 t_1^2}$ et $\varphi_{X-Y}(t_2) = \varphi_X(t_2)\,\varphi_Y(-t_2) = e^{-\sigma^2 t_2^2}$, on voit bien que $\varphi_{(X+Y, X-Y)}(t_1, t_2) = \varphi_{X+Y}(t_1)\,\varphi_{X-Y}(t_2)$, $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Un résultat du cours nous dit alors que cette relation signifie l'indépendance entre $X+Y$ et $X-Y$. □

Exercices bonus sur convergence en loi

15. Supposons que $X_n \to X$ en loi. Supposons que $P_Y = P_X$, et que pour tout n, $P_{X_n} = P_{Y_n}$. Montrer que $Y_n \to Y$ en loi.

Solution de l'exercice 15. Par hypothèse, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ pour tout t. Comme $\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{Y_n}(t)$, $\forall n$, et $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, on a aussi $\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t)$, $\forall t$. Autrement dit, $Y_n \to Y$ en loi. □

16. (i) Supposons que $X_n \to X$ en probabilité et que $Y_n \to Y$ en probabilité. Montrer que $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.

(ii) Donner un exemple tel que $X_n \to X$ p.s., $Y_n \to Y$ en loi, mais que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$.

Solution de l'exercice 16. (i) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|(X_n + Y_n) - (X+Y)| > \varepsilon) \le \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \to 0$. Donc $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.

(ii) Soit X telle que $P_X = \mathscr{N}(0, 1)$. On pose $X_n = Y_n = X$, $\forall n \ge 1$, et $Y = -X$. On remarque que $P_Y = \mathscr{N}(0, 1) = P_X$ (voir l'Exercice 12 avec $a = -1$).

On a $X_n \to X$ p.s., et $Y_n \to Y$ en loi (voir l'exercice précédent), mais $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$. □

17. Soient $X, X_1, X_2, \cdots$ des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $\langle X_n, t\rangle \to \langle X, t\rangle$ en loi, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Solution de l'exercice 17. Écrivons $X := (X^{(1)}, \cdots, X^{(N)})$, $X_n := (X_n^{(1)}, \cdots, X_n^{(N)})$, et $t := (t_1, \cdots, t_N) \in \mathbb{R}^N$.

"$\Rightarrow$" Soit $u \in \mathbb{R}$. Donc $ut := (t_1 u, \cdots, t_N u) \in \mathbb{R}^N$. Par hypothèse, $\varphi_{X_n}(ut) \to \varphi_X(ut)$. Comme $\varphi_{X_n}(ut) = \mathbb{E}(e^{iu\langle X_n, t\rangle}) = \varphi_{\langle X_n, t\rangle}(u)$ et $\varphi_X(ut) = \varphi_{\langle X, t\rangle}(u)$, ceci signifie que $\varphi_{\langle X_n, t\rangle}(u) \to \varphi_{\langle X, t\rangle}(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\langle X_n, t\rangle \to \langle X, t\rangle$ en loi.

"$\Leftarrow$" Il suffit de prendre $u = 1$ dans le paragraphe précédent, en présentant l'argument dans le sens inverse. $\square$

18. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$ converge en loi.

Solution de l'exercice 18. C'est fait dans le cours, la loi limite étant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. $\square$

19. Supposons que $X_n \to X$ en loi. A-t-on nécessairement convergence en loi pour $\frac{X_n}{n^{1/2}}$?

Solution de l'exercice 19. Par le théorème de Slutsky, $\frac{X_n}{n^{1/2}} \to 0$ en loi. $\square$