Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014
Probabilités élémentaires - LM345 — Feuille 9 (semaine du 25 au 29 novembre 2013)

Loi des grands nombres.

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

2. On considère une suite de jets indépendants d'un dé équilibré. On désigne par X_k le résultat du k-ème jet et par Y_n le plus grand résultat observé au cours des n premiers jets.

$$Y_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$$

a) Que peut-on dire des propriétés de convergence de la suite $(Y_n)_n$?

b) On pose : $N_n = Card\{k \leq n : X_k = 6\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir la convergence presque sûre de la suite $\left(\frac{N_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. A l'approche des élections, un institut de sondage contacte successivement des individus. Notre modèle est le suivant : les appels sont indépendants et chaque individu répond qu'il va voter pour le candidat A avec probabilité p_A (et pour le candidat B avec probabilité $p_B = 1 - p_A$). Le but est d'*estimer* le paramètre p_A du modèle.

a) Soit $N_A(n)$ le nombre de réponses en faveur du candidat A collectées en n appels. Que dire de la convergence de la suite $\frac{N_A(n)}{n}$?

b) L'application de l'inégalité de Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{N_A(n)}{n}$ permet-elle de retrouver ce résultat ?

c) Déduire de cette même inégalité un intervalle $I(n,\delta)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(p_A \in I(n,\delta)\right) \geq 1 - \delta$$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de confiance* pour le paramètre p_A.

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 0$, on définit la fonction $b_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in [0,1],\ b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

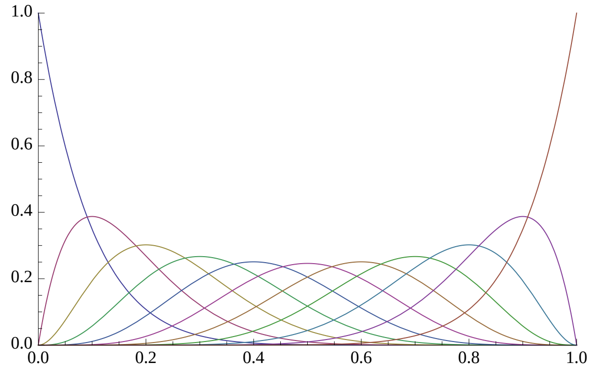
a. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire

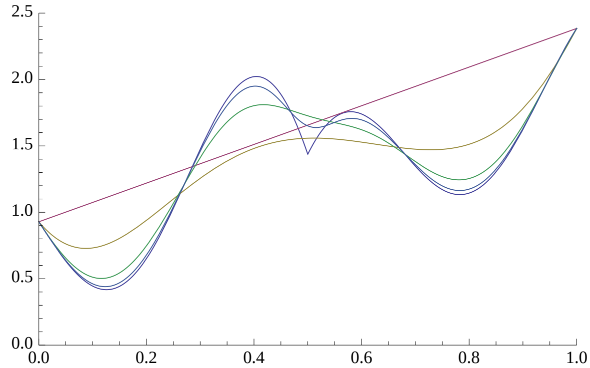
$$\forall x \in [0,1], \ \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$

b. Montrer que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que

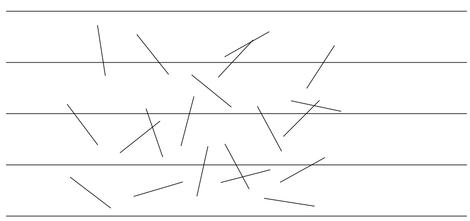
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|b_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

On a démontré le *théorème de Stone-Weierstrass* : toute fonction continue sur un segment y est uniformément approximable par une suite de fonction polynômiales. Plus précisément on a approximé f par une famille de *polynômes de Bernstein.*





5. Pour calculer une valeur approchée de π, le naturaliste Buffon (1707-1788) proposa de laisser tomber sur un plancher fait de planches parallèles et toutes de la même largeur une boîte d'aiguilles de longueur égale à la largeur des planches.



Notant alors n le nombre total d'aiguilles et N le nombre, aléatoire, d'aiguilles qui tombaient à cheval sur deux planches consécutives, il proposa l'approximation suivante :

$$\pi \simeq \frac{2n}{N}.$$

Proposer un modèle rigoureux de cette expérience et justifier la formule de Buffon.