Variables aléatoires : loi et espérance (suite).

1. Loi gaussienne Rappeler la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, quelle est la loi de $\frac{X-\mu}{\sigma}$. Comment simuler une loi gaussienne quelconque ?

2. Soit X une variable aléatoire. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la variable $e^{\lambda X}$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ dans chacun des cas suivants :

a) X suit la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$,

b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$,

c) X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Solution de l'exercice 2.

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $e^{\lambda X}$ est bornée (lorsque X suit une loi uniforme sur $[a, b]$), et donc intégrable. De plus,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \int_a^b (b-a)^{-1} e^{\lambda x} dx = (\lambda(b-a))^{-1}[e^{\lambda x}]_a^b = (\lambda(b-a))^{-1}[e^{\lambda b} - e^{\lambda a}].$$

b)

$$E[e^{\lambda X}] = \int_0^{+\infty} \theta e^{(\lambda-\theta)x} dx = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda \geq \theta, \\ \frac{\theta}{\theta-\lambda} \text{ si } \lambda < \theta. \end{cases}$$

c) Pour la loi normale, en faisant le changement de variable $y = x - \lambda$, il vient $\lambda x - x^2/2 = -y^2/2 + \lambda^2/2$ et on trouve ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2+\lambda^2/2} dy = e^{\lambda^2/2}.$$

3. a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X^2 est intégrable, alors X est intégrable. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que la loi de X admet une densité ?

b) Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que X^k soit intégrable pour tout k compris entre 1 et m et $\mathbb{E}[X^{m+1}] = +\infty$.

Solution de l'exercice 3.

a) En utilisant l'inégalité $|x| \leq 1 + x^2$ valable pour tout réel x et la positivité de l'espérance, on obtient que $\mathbb{E}[|X|] \leq 1 + \mathbb{E}[X^2]$, ce qui prouve que le résultat, sans hypothèse sur la variable aléatoire réelle X autre que l'existence d'un moment d'ordre 2. En particulier c'est vrai si X est à densité.

b) Notons, pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$. Considérons une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(m+2)} \frac{1}{n^{m+2}}.$$

Alors d'une part,

$$\mathbb{E}[X^m] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(m+2)} < +\infty,$$

donc X admet un moment d'ordre m et, d'autre part,

$$\mathbb{E}[X^{m+1}] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty,$$

donc X n'admet pas de moment d'ordre $m+1$.

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que f est la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$.
Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité f.

b) La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

c) Calculer la fonction de répartition de X.

d) Calculer la loi de $Y = \arctan(X)$.

La loi considérée dans cet exercice s'appelle la loi de Cauchy standard.

Solution de l'exercice 4.

a) On effectue le changement de variable $t = \arctan x$, et, comme $\arctan' = \frac{1}{1+\arctan^2}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 1.$$

f est donc la densité d'une probabilité.

b) $\frac{x}{1+x^2} \sim x$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini, et donc X n'est pas intégrable.

c) Par le changement de variable du a), on obtient

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\arctan a} d\theta = \frac{1}{\pi}[\arctan a + \pi/2].$$

d) Soit $b \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a, toujours par le même calcul,

$$\mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq \tan b) = \int_{-\infty}^{\tan b} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{b} d\theta = \frac{b}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Y suit donc la loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X^n]$. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[X^n]$ est le nombre de manières d'apparier n points, c'est-à-dire le nombre de partitions de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ par des paires.

Solution de l'exercice 5. La densité de la loi normale centrée réduite est la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. On sait que pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Soit $n \geq 1$ un entier. Puisque $x \mapsto |x|^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}$ tend vers 0 en l'infini, on a $|x|^n e^{-\frac{x^2}{2}} = O(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$ et $-\infty$, si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ converge. La loi normale centrée réduite admet donc des moments de tous les ordres.

Pour tout $n \geq 0$, posons

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Si n est impair, m_n est l'intégrale d'une fonction intégrable impaire, donc $m_n = 0$. Ceci peut se vérifier en faisant le changement de variable $y = -x$ qui donne la relation $m_n = -m_n$.

Pour $n = 0$, m_0 est l'intégrale de la densité d'une loi de probabilités, donc $m_0 = 1$. Soit $n \geq 2$ un entier pair. On écrit $n = 2p$. Une intégration par parties donne, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} \underbrace{x^{2p-1}}_{u}\underbrace{xe^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^{2p-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-R}^{R} + (2p-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} x^{2p-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.\end{aligned}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on trouve la relation $m_{2p} = (2p-1)m_{2p-2}$, qu'on résout en $m_{2p} = (2p-1)(2p-3)\ldots 3.1$. Ce nombre est souvent noté $(2p)!!$ et vaut $\frac{(2p)!}{2^p p!}$.

Finalement, les moments de la loi normale centrée réduite sont donnés par

$$\forall n \geq 1,\ m_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (2p)!! = \frac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p. \end{cases}$$

Pour apparier n points, il faut choisir avec lequel des $n-1$ autres éléments apparier le premier, puis il en reste $n-2$ à apparier pour lesquels on procède de même. On obtient la même équation de récurrence que précédemment, avec une unique possibilité si $n = 2$ et aucune si n est impair. Le nombre de manière d'apparier n points est donc égal au moment d'ordre n de la loi normale.

6. Soit $\theta > 0$ un réel. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X^n est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X^n]$. Donner une interprétation combinatoire de ce nombre lorsque $\theta = 1$.

Solution de l'exercice 6. Pour $n = 0$, on a évidemment $\mathbb{E}[X^0] = 1$. Soit $n \geq 1$. On intègre par parties (en dérivant le monôme et en primitivant l'exponentielle) :

$$\mathbb{E}[X^n] = \theta \int_0^{+\infty} x^n e^{-\theta x} dx = \theta \left[\frac{x^n e^{-\theta x}}{-\theta} \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\theta x} dx = \frac{n}{\theta} \mathbb{E}[X^{n-1}].$$

En raisonnant par récurrence, on obtient immédiatement $\mathbb{E}[X^n] = n! \theta^{-n}$.

Pour $\theta = 1$, $\mathbb{E}[X^n] = n!$ est le nombre de bijections d'un ensemble ayant n éléments dans lui même.

7. Soit $\lambda > 0$ un réel. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire $X(X-1)\dots(X-k+1)$ est intégrable et calculer son espérance. Calculer $\mathbb{E}[X^m]$ pour $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ et vérifier que pour chacune de ces valeurs de m, $\mathbb{E}[X^m]$ est le nombre de partitions d'un ensemble à m éléments lorsque $\lambda = 1$. *On peut démontrer que cette assertion est vraie pour tout* $m \geq 1$.

Solution de l'exercice 7. $Y_k := X(X-1)\dots(X-k+1)$ est une variable aléatoire positive, on peut donc calculer son espérance (éventuellement infinie, auquel cas elle n'est pas intégrable). En utilisant le fait que $Y_k = 0$ lorsque $X = 0, \dots, k-1$, on obtient

$$\mathbb{E}[Y_k] = e^{-\lambda} \sum_{i \geq k} \frac{i(i-1)\dots(i-k+1)\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{i \geq k} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!} = \lambda^k < +\infty.$$

On sait que les Y_k permettent de retrouver les X^k par combinaison linéaire (famille échelonnée de polynômes, même si ici X désigne une variable aléatoire et pas une indéterminée). On trouve, en identifiant les coefficients

$$X = Y_1, \quad X^2 = Y_2 + Y_1, \quad X^3 = Y_3 + 3X^2 - 2X = Y_3 + 3Y_2 + Y_1,$$

$$X^4 = Y_4 + 6X^3 - 11X^2 + 6X = Y_4 + 6Y_3 + 7X^2 - 6X = Y_4 + 6Y_3 + 7Y_2 + Y.$$

On prend maintenant les espérances et on utilise la relation $\mathbb{E}[Y_k] = \lambda^k$ calculée plus haut pour obtenir les premiers moment de X :

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \mathbb{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda, \quad \mathbb{E}[X^3] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda, \quad \mathbb{E}[X^4] = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda.$$

Pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\mathbb{E}[X] = 1, \quad \mathbb{E}[X^2] = 3, \quad \mathbb{E}[X^3] = 5, \quad \mathbb{E}[X^4] = 15.$$

On constate que pour ces 4 valeurs, $\mathbb{E}[X^m]$ est le nombre de partitions d'un ensemble à m éléments, et même que le coefficient devant λ^k est celui des partitions de cet ensemble en k sous-ensembles. Par exemple pour $m = 4$, on a : pour $k = 4$, une seule partition (composée de 4 singletons), pour $k = 3$, 6 partitions (composées d'une paire et de deux singletons), pour $k = 2$, 7 partitions (3 composées de deux paires et 4 composées d'un brelan et d'un singleton) et enfin pour $k = 1$ une seule (réduite à l'ensemble total).

8. Inégalité de Markov Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Soit $a > 0$ un nombre réel.

a) Montrer que $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

b) Que peut-on dire de la proportion de la population qui gagne plus de dix fois le salaire moyen ?

Solution de l'exercice 8.

a) On vérifie facilement que pour tout $\omega \in \Omega$, $a\mathbb{1}_{\{|X(\omega)| \geq a\}} \leq |X(\omega)|$. Par positivité de l'espérance, on obtient en intégrant :

$$a\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Il suffit de diviser par a pour obtenir l'inégalité demandée.

b) En considérant que X est le salaire, et en choisissant $a = 10\mathbb{E}(|X|)$, on déduit de l'inégalité de Markov que la proportion de la population qui gagne plus de dix fois le salaire moyen est inférieure à 1/10.

9. Montrer qu'une variable aléatoire positive dont l'espérance est nulle est nulle presque sûrement.

Solution de l'exercice 9. Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire réelle positive. Il s'agit de montrer que si $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $\mathbb{P}(X > 0) = 0$. Pour tout $n \geq 1$, définissons un événement $A_n \in \mathscr{F}$ en posant $A_n = \{X \geq \frac{1}{n}\}$. La suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante et vérifie $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \{X > 0\}$. On en déduit que $\mathbb{P}(X > 0)$ est la limite des $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{n})$ lorsque n tend vers l'infini.

En applicant l'inégalité de Markov, on obtient alors $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{n}) \leq n\mathbb{E}(X) = 0$ d'où $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{n}) = 0$ pour tout n et en passant à la limite, $\mathbb{P}(X > 0) = 0$.

10. Soient $\lambda, \mu > 0$ deux réels. On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^2$, la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ et, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$, la probabilité $\mathbb{P}$ caractérisée par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\{(n, m)\}) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\mu^m}{m!}.$$

Enfin, sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on définit les deux variables aléatoires $X(n, m) = n$ et $Y(n, m) = m$.

a) Vérifier que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Déterminer la loi de $X+Y$.

Solution de l'exercice 10.

a) On peut sommer la série double (car à termes positifs) dans l'ordre de son choix, par exemple en m puis en n. En reconnaissant le développement de l'exponentielle de μ, on obtient :

$$\sum_{m\geq 1} \mathbb{P}(\{n,m\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{m\geq 1} e^{-\mu}\frac{\mu^m}{m!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$

et donc on a bien :

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \mathbb{P}(\{n,m\}) = \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

b) D'après le calcul précédent, $\mathbb{P}(X=n) = \sum_{m\geq 1}\mathbb{P}(\{n,m\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, donc X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
Un calcul analogue montre que Y suit la loi de Poisson de paramètre μ.

c) Déterminons la loi de $X+Y$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{n=0}^{k}\mathbb{P}(\{n,k-n\}) = \sum_{n=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\mu^{k-n}}{(k-n)!}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k} C_k^m\lambda^k\mu^{k-n} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda+\mu)^k}{k!}.\end{aligned}$$

$X+Y$ suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.