Variables aléatoires discrètes : loi et espérance.

1. Espérance et probabilité Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement, justifier que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

2. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur *pile* avec probabilité p et sur *face* avec probabilité $1-p$.

a) Décrire le modèle probabiliste utilisé pour modéliser cette situation.

b) On appelle T_1 le numéro du premier lancer où l'on obtient *pile*. Déterminer la loi de T_1.

c) Pour tout $i \geq 1$, on appelle T_i le numéro du lancer où l'on obtient *pile* pour la i-ième fois. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \geq 1$.

3. Dans une population de n oiseaux, on en capture m que l'on bague puis que l'on relâche. Un peu plus tard, on en capture à nouveau m.

a) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Quelle est la probabilité que parmi les m oiseaux capturés, k soient bagués ?

b) Pour quelle valeur de k la probabilité calculée ci-dessus est-elle maximale ?

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et on suppose $p_n > 0$. Soit $\lambda > 0$ un réel. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{n}$.

5. Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$ deux réels. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $p_{i,j} = \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j$.

a) Montrer qu'en posant $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = p_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit une mesure de probabilités sur $\mathbb{N}^2$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $X((i,j)) = i$ et $Y((i,j)) = j$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. Montrer qu'on a l'égalité

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

7. Soient $X, Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer de deux façons différentes que

$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(X = n) + \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(X + Y = n).$$

8. Fonction génératrice Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout réel $s \in [0, 1]$, la fonction s^X est une variable aléatoire intégrable. *On rappelle que par convention,* $0^0 = 1$.

On appelle *fonction génératrice* de X la fonction

$$\begin{aligned} G_X : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \mathbb{E}[s^X]. \end{aligned}$$

b) Montrer que G_X est une fonction positive croissante. Calculer ses valeurs en 0 et en 1.

c) Calculer la fonction G_X lorsque X suit l'une des lois suivantes :

(i) Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$,

(ii) binomiale de paramètres $n \geq 0$ et $p \in [0, 1]$,

(iii) géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$,

(iv) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

d) Que peut-on dire de deux variables aléatoires à valeurs entières qui ont la même fonction génératrice ?

9. On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On suppose que les variables aléatoires $(N, X_1, X_2, ...)$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

a) Ecrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i

b) Pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(D = d|N = n)$.

c) En déduire la loi de D et la loi de la variable aléatoire de $\mathbb{N}^2$ $Z = (D, N)$.

d) Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice de cette variable aléatoire.