Université Pierre et Marie Curie — 2012-2013

Probabilités élémentaires - LM345 — Feuille 10 (semaine du 3 au 7 décembre 2012)

Convergence en loi. Théorème de la limite centrale.

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

2. a. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle constante a. Montrer que la convergence a lieu aussi en probabilité.

b. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de même loi de Cauchy de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$.

Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

3. Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux variables aléatoires réelles.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(|Y_n|)|e^{itY_n} - 1|].$$

b. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

c. Montrer que la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X n'implique pas la convergence en loi de $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Rappeler la loi de S_n et calculer la limite de la suite $\left(e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$.

5. a. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels dans $]0,1[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. telles que pour tout n : $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de Poisson paramètre λ. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.

b. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Etudier le comportement asymptotique en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k$.

6. On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

7. La somme des résultats de 10000 lancers d'un même dé est 35487. Pensez-vous que ce dé soit truqué ? *On pourra utiliser l'égalité approchée* $\int_{3,29}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \simeq 0,0005\sqrt{2\pi}$.