TD7. Variables indépendantes, produit de convolution

1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\theta_1 > 0$, et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\theta_2 > 0$.

a) Calculer f_X, la fonction génératrice de X. Quelle est la loi de $X + Y$?

b) Calculer φ_X, la fonction caractéristique de X. Quelle est la loi de $X + Y$?

c) Calculer le produit de convolution de P_X et P_Y. Quelle est la loi de $X + Y$?

2. Soit $\theta > 0$ un réel. On effectue n expériences indépendantes, ayant chacune une probabilité $\frac{\theta}{n}$ de réussir. On note X_n le nombre d'expériences ayant réussi.

a) Déterminer la loi de X_n et sa fonction caractéristique φ_{X_n}.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $\varphi_{X_n}(t)$ lorsque $n \to \infty$. On note $\varphi(t)$ cette limite. La fonction φ est-elle la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ?

3. Construire un couple de variables aléatoires X et Y de carré-intégrables tel que $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$.

4. Soient $p, q \in [0, 1]$ des réels. Soient X et Y des variables aléatoires réelles. On suppose que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et que Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer que

$$\max\{p + q - 1, 0\} - pq \leq \mathrm{Cov}(X, Y) \leq \min\{p, q\} - pq.$$

5. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$. On pose $U := X + Y$ et $V := X - Y$.

a) Déterminer la loi de U, ainsi que celle de V.

b) Montrer que U et V sont indépendantes.

6. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$. On pose $Z := X^2 + Y^2$. Calculer la fonction de répartition de Z. Que peut-on dire de la loi de Z ?

7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On pose $M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $I_n := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

a) Déterminer F_{M_n}, la fonction de répartition de M_n, en termes de F_{X_1}.

b) Déterminer F_{I_n}.

c) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(nI_n \leq x)$ converge vers une limite que l'on précisera.

8. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y := X^2$.

a) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

9. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$. On pose $Z := \frac{X}{Y}$ (qui est bien définie avec probabilité 1 car $\mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$). À l'aide de la fonction de répartition, déterminer la loi de Z.