TD7. Vecteurs aléatoires

1. On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On suppose que les variables aléatoires $(N, X_1, X_2, ...)$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

a) Ecrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i

b) Pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(D = d|N = n)$.

c) En déduire la loi de D et la loi de la variable aléatoire de $\mathbb{N}^2$ $Z = (D, N)$.

d) Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice de cette variable aléatoire.

2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer les lois de X, Y, $X + Y$, $X^2 + Y^2$.

3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$. Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

4.

a) Soient $\theta > 0$ un nombre réel et $k, l \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}(x, y)$$

soit la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de X. *Cette loi s'appelle la loi Gamma de paramètres θ et k : on écrit $X \sim \Gamma(\theta, k)$.* Quelle est cette loi lorsque $k = 1$?

b) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité décrite à la question précédente. Déterminer la loi de $X + Y$.

5. Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire tel que X suive la loi de Bernoulli de paramètre p et Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer qu'on a

$$\max(p + q - 1, 0) - pq \leq \mathrm{Cov}(X, Y) \leq \min(p, q) - pq$$

et que les deux bornes de cette égalité peuvent être atteintes.

6. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont chaque composante est de carré intégrable. On appelle *matrice de variance-covariance* (ou simplement *matrice de covariance*) de X la matrice

$$D = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1\ldots n}.$$

Montrer que cette matrice est symétrique et positive, au sens où pour tout vecteur ligne $A = (a_1, \ldots, a_n)$ de n réels, on a l'inégalité

$$AD\,{}^tA = \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j \geq 0.$$

7. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à deux dimensions, de loi gaussienne $\mathcal{N}((0, 0), \Lambda)$.

a) Pourquoi peut-on écrire Λ sous la forme :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\{X_1\}$, $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}\{X_2\}$? Comment s'appelle le coefficient ρ ?

b) On supppose dans la suite que $|\rho| < 1$. Donner l'expression de la densité de probabilité $f_X(x)$ du couple X.

c) Calculer la densité de probabilité conditionnelle $f_{X_2|X_1=x_1}$ de X_2 sachant $X_1 = x_1$. Quelle est cette loi ?

d) En déduire l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1]$, de X_2 sachant $X_1 = x_1$.