

Chapitre II. Mouvement brownien et propriété de Markov

Dans tous les exercices, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 1 On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

- (i) La variable aléatoire d_1 est-elle un temps d'arrêt ?
- (ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov au temps 1 et une formule obtenue dans le cours pour la loi de $\tau_x, x \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 : B_t = 0\}$.

- (i) La variable aléatoire τ est-elle un temps d'arrêt ?
- (ii) Calculer la loi de τ .

Exercice 3 (i) Étudier la convergence en probabilité de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \rightarrow \infty$).

- (ii) Étudier la convergence p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$.

Exercice 4 (i) Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints de \mathbb{R}_+ . Montrer que presque sûrement, $\sup_{t \in [a, b]} B_s \neq \sup_{t \in [c, d]} B_s$.

- (ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

Exercice 5 En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t e^{B_s} ds)^{1/t^{1/2}} \rightarrow e^{|N|}$ en loi lorsque $t \rightarrow \infty$, où N suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 6 (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Rappelons que $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \forall \lambda \geq 0$. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

- (ii) Montrer que si ξ est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}, \forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n. 0).

Exercice 7 Soit $S_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s, t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\tilde{N}|, 0\}$, où N et \tilde{N} désignent deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 8 Montrer, sans utiliser la propriété d'inversion du temps, mais avec la loi des grands nombres et le principe de réflexion, que $\frac{B_t}{t} \rightarrow 0$ p.s. lorsque $t \rightarrow \infty$.

Exercice 9 Le but de cet exercice est de prouver que $\tau < \infty$ p.s., où $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = \sqrt{1+t}\}$ ($\inf \emptyset := \infty$).

Pierre dit : Puisque τ est \mathcal{F}_{0+} -mesurable, on sait d'après la loi 0–1 de Blumenthal que $\mathbb{P}\{\tau < \infty\}$ est 0 ou 1. Or, $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} \geq \mathbb{P}\{B_1 \geq \sqrt{2}\} > 0$, on a $\tau < \infty$ p.s.

Que pensez-vous de l'argument de Pierre ?

Exercice 10 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t) dt = \infty$.

Exercice 11 (i) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{s \in [0,t]} |B_s| \leq \varepsilon\} > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $c \in]0, \infty[$ tel que $\mathbb{P}\{\sup_{s \in [0,1]} |B_s| \leq \varepsilon\} \geq e^{-c/\varepsilon^2}$, $\forall \varepsilon \in]0, 1]$.

(iii) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{s \in [0,t]} |B_s| \geq x\} > 0$.

Exercice 12 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s \in [0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log \log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1 + \varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1 + \varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{s \in [0,t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \quad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1 - \theta^{-1}}[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \quad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s \in [0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1, 2$, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}}$?