EXAMEN 25 janvier 2018
Calcul stochastique et processus de diffusion
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$.

Exercice 1. Soit $\eta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ une variable aléatoire indépendante de B. On définit

$$Y_t := \eta\, t + B_t, \qquad t \geq 0,$$

et $\mathcal{G}_t := \sigma(Y_s, s \in [0,t])$. On veut retrouver η à partir de l'observation du processus Y.

(1) Montrer que $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien et calculer la loi de Y_t pour tout $t \geq 0$.

(2) Calculer $\mathrm{Cov}(\eta, Y_s)$, $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t)$ pour $s, t \geq 0$.

(3) Soit $t > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un réel λ_t et une variable aléatoire Z_t indépendante de $\mathcal{G}_t$ tels que $\eta = \lambda_t Y_t + Z_t$. Quelle est la loi de Z_t ?

(4) Calculer $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ et la limite de $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ quand $t \to +\infty$.

(5) La variable η est-elle $\mathcal{G}_t$-mesurable ? Et $\mathcal{G}_\infty$-mesurable ?

Solution de l'exercice 1.

(1) Y est gaussien car fonction linéaire de la famille gaussienne $(\eta, B_t, t \geq 0)$. La loi de Y_t est $\mathcal{N}(mt, \sigma^2 t^2 + t)$.

(2) Nous avons

$$\mathrm{Cov}(\eta, Y_s) = s\sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = ts\sigma^2 + s \wedge t.$$

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Z := \eta - \lambda Y_t$. Donc la famille $(Z, Y_s, s \in [0,t])$ est gaussienne et Z est indépendant de $(Y_s, s \in [0,t])$ ssi

$$\mathrm{Cov}(Z, Y_s) = s\sigma^2 - \lambda s(t\sigma^2 + 1) = 0, \qquad \forall\ s \in [0,t]$$

et donc ssi $\lambda = \lambda_t = \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2}$. Nous avons donc

$$\eta = \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2} Y_t + Z_t, \qquad Z_t := \frac{1}{1+t\sigma^2}\eta - \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2} B_t,$$

et la loi de Z_t est $\mathcal{N}(\frac{1}{1+t\sigma^2} m, \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2})$.

(4) Nous obtenons du point précédent

$$M_t := \mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t] = \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2} Y_t + \mathbb{E}[Z_t] = \frac{\sigma^2}{1+t\sigma^2} Y_t + \frac{1}{1+t\sigma^2} m$$

et donc $\lim_{t\to+\infty} M_t = \eta$ p.s. puisque $B_t/t \to 0$ quand $t \to +\infty$.

(5) η n'est pas $\mathcal{G}_t$-mesurable puisque $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t] \neq \eta$. Par contre η est $\mathcal{G}_\infty$- mesurable puisqu'elle est la limite p.s. de M_t quand $t \to +\infty$.

Exercice 2. Soit $M_t := \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, $t \geq 0$.

(1) Montrer que M est une martingale et en donner une expression comme intégrale stochastique.

(2) Montrer que pour tout $b \geq 0$, la martingale locale $\mathscr{E}(-bM)$ est une martingale. Pour un $T > 0$ fixé, définir la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(-bM)_T \cdot \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F}_T)$.

(3) Calculer l'EDS satisfaite par $(B_t, t \in [0,T])$ sous $\mathbb{Q}$ et la loi de B_t sous $\mathbb{Q}$, $t \in [0,T]$.

(4) En déduire une expression pour

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s\right)\right], \qquad a, b \geq 0.$$

(5) En rappellant que pour $\alpha, \beta > 0$ et $s \geq 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta+s)x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta}{s+\beta}\right)^\alpha$$

calculer

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \,\middle|\, B_t = y\right], \qquad b > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2. (1) Par la formule d'Itô

$$M_t = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) = \int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s.$$

(2) Pour tout $b > 0$ nous avons

$$\mathcal{E}(-bM)_t = \exp\left(-bM_t - \frac{b^2}{2}\langle M\rangle_t\right) = \exp\left(-\frac{b}{2}(B_t^2 - t) - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \leq e^{bt/2}.$$

Donc $N_t := \mathcal{E}(-bM)_t$ est une martingale locale telle que $\sup_{s\in[0,T]}|N_s|$ est borné donc L^1, et par un théorème du cours ceci implique que N est une martingale, avec en particulier $\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[N_0] = 1$. On peut aussi appliquer le Thm 6.5.9 du cours, car

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{b}{2}M_T}] = \mathbb{E}[e^{-\frac{b}{4}B_T^2 + \frac{bT}{4}}] < +\infty.$$

(3) Par le Théorème de Girsanov, sous $\mathbb{Q}$ nous avons que

$$B_t = \tilde{B}_t + \langle B, -bM\rangle_t = \tilde{B}_t - b\int_0^t B_s\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T],$$

où $\tilde{B}$ est un MB (puisque martingale locale issue de 0 et ayant la même variation quadratique que B). On reconnait donc un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre b issu de 0 (voir le TD 5, exo 2) et B_t a donc sous $\mathbb{Q}$ loi $\mathcal{N}(0, \frac{1-e^{-2bt}}{2b})$.

(4) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right)\right] &= \mathbb{Q}\left[\exp\left(\left(\frac{b}{2} - a\right)B_t^2 - \frac{b}{2}t\right)\right] \\
&= \left(1 + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-2bt})\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-bt/2} \\
&= \left(\cosh(bt) + 2\frac{a}{b}\sinh(bt)\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

puisque si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors un calcul donne pour $\alpha > -1/2$

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\alpha Z^2)\right] = (1+2\alpha)^{-1/2}.$$

(5) Soit $g(b,y) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \,\middle|\, B_t = y\right]$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}\, g(b,y)\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi t}}$$
$$= \int_0^\infty e^{-ay}\, g\left(b,\sqrt{y}\right)\, e^{-\frac{y}{2t}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi y t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty e^{-(a+\frac{1}{t})y}\, g\left(b,\sqrt{y}\right)\, y^{-1/2}\,\mathrm{d}y.$$

D'autre côté

$$\left(\cosh(bt) + 2\frac{a}{b}\sinh(bt)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{b}{2\tanh(bt)}}{a + \frac{b}{2\tanh(bt)}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\cosh(bt))^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{(\cosh(bt))^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \beta^{\frac{1}{2}}\, x^{-1/2} e^{-(\beta+a)x}\,\mathrm{d}x, \qquad \beta := \frac{b}{2\tanh(bt)}.$$

Donc par l'injectivité de la transformée de Laplace

$$g(b,x) = \left(\frac{bt}{\sinh(bt)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\left(\frac{bt}{2\tanh(bt)} - 1\right)\right].$$

Exercice 3. Soit $x > 0$ et pour tout $y > 0$ soit $\tau_y := \inf\{s \geq 0 : B_s = y\}$. Fixons $y \in]0, 1/x[$ et définissons

$$X_t^y := \frac{x}{1 - xB_{t\wedge\tau_y}}, t \geq 0.$$

(1) Montrer que $(X_t^y)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale et calculer sa décomposition en somme de processus à variation finie et martingale locale.

(2) Trouver des fonctions $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *indépendantes de* y, telles que

$$X_t^y = x + \int_0^t \mathbb{1}_{(X_s^y < \frac{x}{1-xy})}\, b(X_s^y)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbb{1}_{(X_s^y < \frac{x}{1-xy})}\, \sigma(X_s^y)\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \geq 0,$$

pour tout $y \in]0, 1/x[$.

(3) Discuter existence et unicité de solutions de l'EDS $E_x(\sigma, b)$ sur un intervalle fixé $[0,T]$.

Solution de l'exercice 3. (1) Soit $f(y) := \frac{x}{1-xy}$, $y < 1/x$. Alors

$$f'(y) = \frac{x^2}{(1-xy)^2} = (f(y))^2, \qquad f''(y) = 2\frac{x^3}{(1-xy)^3} = 2(f(y))^3.$$

Par la formule d'Itô

$$X_t = x + \int_0^{t\wedge\tau_y} \frac{x^2}{(1-xB_s)^2}\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_y} 2\frac{x^3}{(1-xB_s)^3}\,\mathrm{d}s$$

(2) Par le point précédent, nous avons $b(z) = z^3$ et $\sigma(z) = z^2$.

(3) Les fonctions b et σ sont *localement* lipschitziennes, mais *pas lipschitziennes*, car leurs dérivées ne sont pas bornées. On ne peut donc pas appliquer le théorème du cours sur le cas lipschitzien. De plus, il est clair que nous avons ici un phénomène d'explosion : quand $t \to \tau_{1/x}$, alors

$$\frac{x}{1 - xB_t} \to +\infty.$$

Puisque $\mathbb{P}(\tau_{1/x} < T) > 0$, sur tout intervalle $[0, T]$ nous avons probabilité positive que une solution de $E_x(\sigma, b)$ explose (i.e. diverge à $+\infty$) avant T.

Exercice 4. Soit $Z_t = (X_t, Y_t)$ un mouvement Brownien planaire. L'*aire de Lévy* de Z est définie par

$$A_t := \int_0^t (X_s \,\mathrm{d}Y_s - Y_s \,\mathrm{d}X_s), \qquad t \geq 0.$$

(1) Définir explicitement un mouvement brownien standard $(\beta_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$A_t = \int_0^t R_s \,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t \geq 0,$$

où $R_s := |Z_s|$, $s \geq 0$.

On peut admettre dans les points (2) et (3) que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ et $(R_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants.

(2) Pour $t \geq 0$ fixé, calculer la loi conditionnelle de A_t sachant $(R_s)_{s\geq 0}$.

(3) En utilisant le point (4) de l'exercice 2, calculer

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t)], \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) Montrer que γ est un mouvement brownien standard indépendant de β, où

$$\gamma_t := R_t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_u}\,\mathrm{d}u, \qquad t \geq 0.$$

(5) Montrer que β et R sont indépendants.

Solution de l'exercice 4.

(1) Nous avons

$$\beta_t := \int_0^t \frac{1}{R_s}(X_s \,\mathrm{d}Y_s - Y_s \,\mathrm{d}X_s), \qquad t \geq 0.$$

Cette intégrale stochastique est bien définie comme martingale locale puisque

$$\int_0^t \frac{1}{R_s^2}(X_s^2 + Y_s^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}s = t < +\infty.$$

En outre, on vient de voir que la martingale locale β a variation quadratique $\langle \beta \rangle_t = t$ p.s. pour tout $t \geq 0$. Il s'agit donc d'un MB standard.

(2) Sachant $(R_s)_{s\geq 0}$, la loi de A_t est, par l'indépendance entre R et β, une loi $\mathcal{N}(0, \int_0^t R_s^2 \,\mathrm{d}s)$.

(3) Nous avons

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t) \mid R]] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t R_s^2 \,\mathrm{d}s\right)\right]$$
$$= \left\{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s\right)\right]\right\}^2 = \frac{1}{\cosh(\lambda t)}$$

(4) Par la formule d'Itô nous savons que

$$R_t = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_u}\,\mathrm{d}u + \gamma_t$$

où le processus

$$\gamma_t := \int_0^t \frac{1}{R_u}\,(X_u\,\mathrm{d}X_u + Y_u\,\mathrm{d}Y_u)$$

est un MB standard. Il est facile de voir que (γ, β) est un couple de MB standard orthogonaux (i.e. le crochet $\langle \gamma, \beta\rangle_t$ est identiquement nul p.s.), donc indépendants par le Théorème de Knight vu en cours.

(5) Il faut maintenant montrer que R est une fonction mesurable de γ. Il est clair par la relation ci-dessus que γ est une fonction de R. Montrons que cette fonction est injective : si R^1 et R^2 sont deux trajectoires continues telles que $R_0^i = 0$ et

$$R_t^1 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_u^1}\,\mathrm{d}u = R_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_u^2}\,\mathrm{d}u, \qquad t \geq 0,$$

alors

$$R_t^1 - R_t^2 = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{R_u^1} - \frac{1}{R_u^2}\right)\mathrm{d}u, \qquad t \geq 0,$$

et alors

$$\frac{d}{dt}\left(R_t^1 - R_t^2\right)^2 = \left(R_t^1 - R_t^2\right)\left(\frac{1}{R_t^1} - \frac{1}{R_t^2}\right) \leq 0.$$

Puisque $\left(R_0^1 - R_0^2\right)^2 = 0$, nous obtenons que $\left(R_t^1 - R_t^2\right)^2 = 0$ pour tout $t \geq 0$. Nous obtenons donc que R est une fonction de γ et donc indépendant de β.