EXAMEN 12 janvier 2017
Calcul stochastique et processus de diffusion
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$.

Exercice 1. (Polynômes d'Hermite) Soit $M_0(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$

$$M_{n+1}(t) = \int_0^t M_n(s)\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \geq 0.$$

(1) Montrer par récurrence que

$$\mathbb{E}\left[(M_n(t))^2\right] = \frac{t^n}{n!}, \qquad t \geq 0,\ n \geq 0.$$

(2) Soit $T > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$ la série

$$L_\alpha(t) := \sum_{n\geq 0} \alpha^n M_n(t)$$

converge dans L^2 pour tout $t \in [0, T]$. Montrer la continuité p.s. des trajectoires de L_α.

(3) Montrer que L_α satisfait

$$L_\alpha(t) = 1 + \int_0^t L_\alpha(s)\,\alpha\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0, T].$$

(4) Pour $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$H(\alpha, x, c) := \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}c\right), \qquad H_n(x, c) := \frac{\partial^n H}{\partial \alpha^n}(0, x, c).$$

Montrer que p.s. pour tout $n \geq 0$ nous avons $M_n(t) = H_n(B_t, t)/n!$, $t \geq 0$.

Solution de l'exercice 1.

(1) Nous avons $M_0(t) = 1$ et par récurrence M_n est une martingale continue telle que $M_n(t) \in L^2$ pour tout $t \geq 0$ et

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1}(t))^2\right] = \int_0^t (M_n(s))^2\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{s^n}{n!}\,\mathrm{d}s = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad t \geq 0,\ n \geq 0.$$

(2) Soit $T > 0$ fixé. Puisque $\|M_n(t)\|_{L^2} = \sqrt{t^n/n!} \leq t^{n/2}$, alors pour $\alpha_0 = T^{-1/2}$ et $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$ nous avons pour tout $t \in [0, T]$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha^k M_k(t) \right\|_{L^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} (|\alpha| T^{1/2})^k \to 0$$

quand $n < m$ et $n, m \to +\infty$. Par complétude de L^2, nous avons donc une limite $L_\alpha(t)$ dans L^2. Par l'inégalité de Doob

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|L_\alpha(t)-\sum_{k=0}^{n}\alpha^k M_k(t)\right|^2\right] \leq 4\left\|L_\alpha(T)-\sum_{k=0}^{n}\alpha^k M_k(T)\right\|_{L^2}^2 \to 0$$

quand $n \to +\infty$ et L_α a donc p.s. trajectoires continues.

(3) Pour tout n, par récurrence

$$\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^k M_k(t) = 1+\alpha\sum_{k=0}^{n}\alpha^k M_{k+1}(t) = 1+\alpha\int_0^t\sum_{k=0}^{n}\alpha^k M_k(s)\,\mathrm{d}B_s$$

et en passant à la limite $n \to +\infty$ grâce à l'isométrie d'Itô

$$L_\alpha(t) = 1+\int_0^t L_\alpha(s)\,\alpha\,\mathrm{d}B_s, \qquad t\in[0,T].$$

Nous obtenons que

$$L_\alpha(t) = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right), \qquad t \geq 0,$$

par unicité de la solution de cette équation.

(4) Puisque $L_\alpha(t) = H(\alpha, B_t, t)$, nous obtenons que p.s.

$$H_n(B_t,t) := \frac{\partial^n H}{\partial\alpha^n}(0,B_t,t) = \left.\frac{\partial^n L_\alpha(t)}{\partial\alpha^n}\right|_{\alpha=0} = n!M_n(t).$$

Exercice 2. Soit $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$. Nous voulons montrer que le processus

$$\gamma_u := \frac{1}{\sqrt{g_1}}B_{g_1 u}, \qquad u\in[0,1],$$

est un pont brownien.

(1) Montrer que le processus $(tB_{\frac{1}{t}-1})_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien.

(2) Montrer que p.s. $g_1 > 0$. La variable aléatoire g_1 est-elle un temps d'arrêt ?

(3) Soit $\hat{B}_t := tB_{\frac{1}{t}}$, $t \geq 0$. Montrer que $\hat{B}$ est un mouvement brownien. Soit $\hat{d}_1 := \inf\{t \geq 1 : \hat{B}_t = 0\}$; montrer que $\hat{d}_1 = 1/g_1$. La variable aléatoire $\hat{d}_1$ est-elle un temps d'arrêt ?

(4) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{g_1}}B_{g_1 u} = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}}\left(\hat{B}_{\hat{d}_1+\hat{d}_1(\frac{1}{u}-1)} - \hat{B}_{\hat{d}_1}\right).$$

En déduire que $(\gamma_u)_{u\in[0,1]}$ est un pont brownien.

Solution de l'exercice 2. (1) Le processus $(tB_{\frac{1}{t}-1})_{t\in[0,1]}$ est gaussien centré car fonction linéaire de B. Nous calculons la fonction de covariance :

$$\mathbb{E}\left[tB_{\frac{1}{t}-1}sB_{\frac{1}{s}-1}\right] = ts\left(\frac{1}{t}-1\right)\wedge\left(\frac{1}{s}-1\right) = t\wedge s - st.$$

Il s'agit donc d'un pont brownien.

(2) Nous avons vu dans le cours que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(B_t \neq 0,\ \forall t \in]0, \varepsilon]) = 0$, et donc p.s. $g_1 > 0$. Si la variable aléatoire g_1 était un temps d'arrêt, on pourrait appliquer la propriété de Markov forte et avoir que $(B_{t+g_1})_{t\geq 0}$ est un MB ; or on sait que $\mathbb{P}(B_t \neq 0,\ \forall t \in]g_1, 1]) = 1$ et ce processus ne peut donc pas être un MB.

(3) Nous calculons la fonction de covariance de $\hat{B}$:

$$\mathbb{E}\left[\hat{B}_t \hat{B}_s\right] = ts \left(\frac{1}{t}\right) \wedge \left(\frac{1}{s}\right) = t \wedge s.$$

Maintenant $\hat{d}_1$ est un temps d'arrêt pour la filtration canonique $\hat{\mathscr{F}}_t$ de $\hat{B}$.

(4) Pour tout $u \in [0, 1]$

$$\frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + \hat{d}_1(\frac{1}{u} - 1)} - \hat{B}_{\hat{d}_1}\right) = \sqrt{\hat{d}_1}\, B_{u/\hat{d}_1} = \frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u}.$$

Puisque $\hat{d}_1$ est un $(\hat{\mathscr{F}}_t)$-temps d'arrêt, par la propriété de Markov forte le processus $(\hat{B}_{\hat{d}_1+t} - \hat{B}_{\hat{d}_1})_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\hat{\mathscr{F}}_{\hat{d}_1}$, donc en particulier de $\hat{d}_1$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + \hat{d}_1 t} - \hat{B}_{\hat{d}_1}\right), \qquad t \geq 0,$$

est aussi un MB. Par les points précédents, nous obtenons que γ est un pont brownien.

Exercice 3. Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On note $\rho_t := |\bar{x} + B_t^{(3)}|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, et $\mathbf{P}_x^3$ la loi de $(\rho_t)_{t\geq 0}$. On peut voir que $(\mathbf{P}_x^3)_{x\geq 0}$ forme une famille markovienne.

Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, nous définissons $T_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ où X est le processus canonique. D'après l'exemple 6.4.9 du polycopié nous avons

$$\mathbf{P}_x^3\left(T_a < T_b\right) = \frac{x^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}}, \qquad 0 < a < x < b$$

et $(1/X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale sous $\mathbf{P}_x^3$.

Soit $J_t := \inf_{u\geq t} X_u$ et $Y_t := 2J_t - X_t$, $t \geq 0$. On fixe $x > 0$. Dans cet exercice, on veut montrer que sous $\mathbf{P}_x^3$ le processus $(Y_t - Y_0)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Soient $a \geq 0$, $t \geq s \geq 0$ et $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de X.

(1) Discuter pourquoi on peut appliquer la formule d'Itô à $|\bar{x} + B_t^{(3)}|$. En déduire que la variation quadratique de ρ est $\langle \rho \rangle_t = t$, $t \geq 0$.

(2) Montrer que, si Y est une martingale locale (par rapport à sa filtration canonique), alors $Y - Y_0$ doit être un MB issu de 0.

(3) Montrer que

$$\mathbf{P}_x^3(T_a < +\infty) = \mathbf{P}_x^3(J_0 \leq a) = \frac{a \wedge x}{x}, \qquad \mathbf{P}_x^3(J_0 > a) = (1 - ax^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(4) Montrer que

$$\mathbf{E}_x^3\left[J_0\, \mathbb{1}_{(J_0 > a)}\right] = \frac{1}{2}(x - a^2 x^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(5) En appliquant la propriété de Markov, montrer que p.s.

$$\mathbf{E}^3_x\left[(2J_s - X_s)\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right] = (a - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(6) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}^3_x\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_t\right] = \mathbf{E}^3_x\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_t>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_t\right]\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t} X_u>a)}.$$

(7) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}^3_x\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right] = \mathbf{E}^3_x\left[(a - a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t} X_u>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right].$$

(8) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}^3_x\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right] = \mathbf{E}^3_{X_s}\left[\left(a - a^2X^{-1}_{(t-s)\wedge T_a}\right)\right]\mathbb{1}_{(a<X_s)} = \left(a - a^2X_s^{-1}\right)\mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(9) Montrer que $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}^X_t \vee \sigma(J_t)$ définit une filtration.

(10) Montrer que $(Y_t)_{t\ge 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\ge0}$ et en déduire que $Y - Y_0$ est un MB.

Ce résultat vaut aussi pour $x = 0$ et a comme conséquence un théorème important dû à Jim Pitman : si B est un MB issu de 0 et $S_t = \sup_{s\le t} B_s$, alors le processus $(2S_t - B_t)_{t\ge0}$ a loi $\mathbf{P}^3_0$.

Solution de l'exercice 3.

(1) On sait que $\mathbb{P}(\bar{x} + B^{(3)}_t \neq 0) = \mathbb{P}(\rho_t > 0\ \forall t \ge 0) = 1$ et la fonction $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \ni a \mapsto |a|$ est lisse, donc ρ_t est une semimartingale avec décomposition canonique $\rho = x + V + M$ et

$$M_t = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\bar{x} + B^i_s}{|\bar{x} + B^{(3)}_s|}\,\mathrm{d}B^i_s, \qquad \langle M\rangle_t = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \left(\frac{\bar{x} + B^i_s}{|\bar{x} + B^{(3)}_s|}\right)^2 \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{|\bar{x} + B^{(3)}_s|^2}{|\bar{x} + B^{(3)}_s|^2}\,\mathrm{d}s = t.$$

Donc $\langle\rho\rangle_t = t$, $t \ge 0$.

(2) Le processus J est croissant et donc à variation finie ; sous $\mathbf{P}^3_x$, X est une semimartingale par le point précédent, avec variation quadratique égale à t, $t \ge 0$. Donc si Y est une martingale locale (par rapport à sa filtration canonique), sa variation quadratique sera égale à t, $t \ge 0$, et $Y - Y_0$ sera un MB par le Théorème de Lévy.

(3) Montrer que

$$\mathbf{P}^3_x(T_a < +\infty) = \mathbf{P}^3_x(J_0 \le a) = \frac{a \wedge x}{x}, \qquad \mathbf{P}^3_x(J_0 > a) = (1 - ax^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(4) Montrer que si $a < x$

$$\mathbf{E}^3_x\left[J_0\,\mathbb{1}_{(J_0>a)}\right] = \mathbf{E}^3_x\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{(J_0>b)}\,\mathrm{d}b\,\mathbb{1}_{(J_0>a)}\right] = \int_0^\infty \mathbf{P}^3_x\left[J_0 > a \vee b\right]\mathrm{d}b =$$

$$= \int_0^a (1 - ax^{-1})\,\mathrm{d}b + \int_a^x (1 - bx^{-1})\,\mathrm{d}b = a - a^2x^{-1} + \left[b - \frac{b^2}{2x}\right]_a^x = \frac{1}{2}(x - a^2x^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(5) Montrer que p.s.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^3_x\left[Y_s\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right] = 2\,\mathbf{E}^3_x\left[J_s\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right] - \mathbf{E}^3_x\left[X_s\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}^X_s\right]\\
&= 2\,\mathbf{E}^3_{X_s}\left[J_0\,\mathbb{1}_{(J_0>a)}\right] - x\,\mathbf{P}^3_{X_s}(J_0 > a) = \left[X_s - a^2/X_s - X_s(1 - a/X_s)\right]\mathbb{1}_{(a<X_s)}\\
&= (a - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{(a<X_s)}.
\end{aligned}$$

(6) Nous avons $\{J_s > a\} = \{J_t > a\} \cap \{\inf_{s \le u \le t} X_u > a\}$. Donc p.s.

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,|\, \mathscr{F}_t^X \right] = \mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_t > a)} \,|\, \mathscr{F}_t^X \right] \mathbb{1}_{(\inf_{s \le u \le t} X_u > a)}.$$

(7) Puisque $\mathscr{F}_s^X \subset \mathscr{F}_s^X$

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{E}_x^3 \left[\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,|\, \mathscr{F}_t^X \right] \,|\, \mathscr{F}_s^X \right]$$
$$= \mathbf{E}_x^3 \left[(a - a^2 X_t^{-1}) \mathbb{1}_{(\inf_{s \le u \le t} X_u > a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X \right].$$

(8) Remarquons que par la propriété de Markov, p.s.

$$\mathbf{E}_x^3 \left[(a - a^2 X_t^{-1}) \mathbb{1}_{(\inf_{s \le u \le t} X_u > a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{E}_{X_s}^3 \left[(a - a^2 X_{t-s}^{-1}) \mathbb{1}_{(\inf_{0 \le u \le t-s} X_u > a)} \right].$$

Or par les définitions, nous voyons que p.s.

$$(a - a^2 X_{t-s}^{-1}) \mathbb{1}_{(\inf_{0 \le u \le t-s} X_u > a)} = a - a^2 X_{(t-s) \wedge T_a}^{-1}.$$

Donc p.s.

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{E}_{X_s}^3 \left[\left(a - a^2 X_{(t-s) \wedge T_a}^{-1} \right) \right] \mathbb{1}_{(a < X_s)}.$$

Or $(X_{t \wedge T_a}^{-1})_{t \ge 0}$ est une martingale bornée sous $\mathbf{E}_x^3$ et donc par le Théorème d'arrêt

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{E}_{X_s}^3 \left[\left(a - a^2 X_{(t-s) \wedge T_a}^{-1} \right) \right] \mathbb{1}_{(a < X_s)} = \left(a - a^2 X_s^{-1} \right) \mathbb{1}_{(a < X_s)}.$$

(9) Nous voulons montrer que $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_t^X \vee \sigma(J_t)$ définit une filtration. Soit $A \in \mathscr{F}_s^X$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$A \cap \{J_s > a\} = A \cap \{\inf_{s \le u \le t} X_u > a\} \cap \{J_t > a\} \in \mathscr{F}_t^X \vee \sigma(J_t).$$

(10) Soient $A \in \mathscr{F}_s^X$, $a \in \mathbb{R}$ et $0 \le s \le t$. Alors par le point (8) nous avons

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_t \, \mathbb{1}_{A \cap (J_s > a)} \right] = \mathbf{E}_x^3 \left[\left(a - a^2 X_s^{-1} \right) \, \mathbb{1}_{A \cap (J_s > a)} \right].$$

Par le point (5) nous avons

$$\mathbf{E}_x^3 \left[Y_s \, \mathbb{1}_{A \cap (J_s > a)} \right] = \mathbf{E}_x^3 \left[\left(a - a^2 X_s^{-1} \right) \, \mathbb{1}_{A \cap (J_s > a)} \right].$$

Cela montre que $(Y_t)_{t \ge 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t \ge 0}$ et donc par rapport à sa filtration canonique. Par le point (2), $Y - Y_0$ est un MB.