EXAMEN 22 janvier 2015
Calcul stochastique et processus de diffusion
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

Durée 3h.

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. On rappelle que, par le principe de réflexion, la densité de (S_t, B_t) est donnée par

$$f_t(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0,\, b<a\}}.$$

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus canonique sur $E := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_x$ la loi de $(x + B_t)_{t\geq 0}$. Soit $\tau := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$, $\inf \emptyset := +\infty$.

(1) Pour toute $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée on définit
$$Q_t f(x) := \mathbb{E}_x(f(X_t)\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}), \qquad t \geq 0,\ x > 0.$$
Montrer que pour $t > 0$, $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, q_t(x,y)\, \mathrm{d}y$, où
$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right)\right), \qquad x, y > 0.$$

(2) On veut montrer que $Q_{t+s} = Q_t Q_s$, c'est à dire que $(Q_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe. Utiliser la propriété de Markov du mouvement brownien ; si $\theta_t : E \mapsto E$ est l'opérateur de décalage $\theta_t(w) = w_{t+\cdot}$, remarquer que $\{\tau > t + s\} = \{\tau > t\} \cap \{\tau \circ \theta_t > s\}$.

(3) Montrer que $X_t \mathbb{1}_{(\tau>t)} = X_{t\wedge\tau}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(X_t\, \mathbb{1}_{(\tau>t)})$.

(4) Soit $p_t(x,y) := \frac{1}{x} q_t(x,y) y$, $x, y > 0$, $t > 0$, et $P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, p_t(x,y)\, \mathrm{d}y$. Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe avec $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

(5) Soit $p_t(y) := \lim_{x\downarrow 0} p_t(x,y)$. Montrer que $p_t(\cdot)$ est la densité de $|B_t^{(3)}|$, où $B^{(3)}$ est un MB dans $\mathbb{R}^3$ issu de 0.

Solution de l'exercice 1. (1) Pour toute $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée on écrit
$$\mathbb{E}_x(f(X_t)\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}) = \mathbb{E}\left(f(x+B_t)\, \mathbb{1}_{(\inf_{s\in[0,t]}(x+B_s)>0)}\right) = \mathbb{E}\left(f(x-B_t)\, \mathbb{1}_{(S_t<x)}\right)$$
puisque $-B$ a même loi que B. Donc par l'expression explicite de $f_t(a,b)$
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(f(X_t)\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-b) \mathbb{1}_{(b\vee 0\leq a\leq x)} \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-b) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[-\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\right]_{y=2b\vee 0-b}^{y=2x-b} \mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-b) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(2x-b)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right)\right) \mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right)\right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

(2) On pose $F := f(X_s)$; alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(f(X_{t+s})\,\mathbb{1}_{(\tau>t+s)}) &= \mathbb{E}_x((F\circ\theta_t)\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}\cap\{\tau\circ\theta_t>s\}})\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_x\left((F\circ\theta_t)\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{1}_{\{\tau\circ\theta_t>s\}})\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbb{E}_x\left((F\circ\theta_t)\,\mathbb{1}_{\{\tau\circ\theta_t>s\}})\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbb{E}_{X_t}\left((F\,\mathbb{1}_{\{\tau>s\}})\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbb{E}_{X_t}\left((f(X_s)\,\mathbb{1}_{\{\tau>s\}})\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,Q_sf(X_t)\right) = Q_tQ_sf(x).
\end{aligned}$$

(3) Sur $\{\tau>t\}$, $X_{t\wedge\tau}=X_t$ et sur $\{\tau\le t\}$, $X_{t\wedge\tau}=X_\tau=0$, donc $X_t\mathbb{1}_{(\tau>t)}=X_{t\wedge\tau}$. On en déduit par le théorème d'arrêt

$$\mathbb{E}_x(X_t\,\mathbb{1}_{(\tau>t)}) = \mathbb{E}_x(X_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}_x(X_0) = x$$

puisque $t\wedge\tau$ est un temps d'arrêt borné.

(4) Soit $p_t(x,y) := \frac{1}{x}q_t(x,y)y$, $x,y>0$, $t>0$. Alors

$$\begin{aligned}
P_tP_sf(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} p_t(x,y)\,\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}_+} p_s(y,z)\,f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{x}q_t(x,y)y\,\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{y}q_s(y,z)z\,f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}_+} q_t(x,y)\,\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}_+} q_s(y,z)\,(zf(z))\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}_+} q_{t+s}(x,y)\,(yf(y))\,\mathrm{d}y = P_{t+s}f(x).
\end{aligned}$$

Or $P_t\mathbf{1}(x) = \int_0^\infty p_t(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int_0^\infty q_t(x,y)y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathbb{E}_x(X_t\mathbb{1}_{(\tau>t)}) = 1$.

(5) Nous avons par l'expression explicite de $q_t(x,t)$:

$$p_t(y) := \lim_{x\downarrow 0} p_t(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}y^2\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right).$$

Nous savons que $\int_0^\infty p_t(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$, et par convergence dominée on obtient que $\int_0^\infty p_t(y)\,\mathrm{d}y = 1$ en passant à la limite $x\downarrow 0$: en effet pour tous $x,y>0$

$$\frac{1}{x}\,q_t(x,y)y = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\,\frac{1-e^{-\frac{xy}{t}}}{x}y \le \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\,e^{-\frac{y^2}{2t}}y^2.$$

Or, en utilisant des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{P}(|B_t^{(3)}|\ge u) = C\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{(r\ge u)}\,r^2\,\exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right)\,\mathrm{d}r$$

où C est une constante de normalisation. Puisqu'il s'agit de deux mesures de probabilités, nous obtenons que $C=\frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}$ et $p_t(\cdot)$ est la densité de $|B_t^{(3)}|$.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$ et $(L_t)_{t\geq 0}$ son temps local en 0. Soit $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. En considérant le processus $e^{-\lambda t}\exp(-\sqrt{2\lambda}\,|B_t|)$, montrer que

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}L_s\right] = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\exp\left(-\sqrt{2\lambda}\,|x|\right).$$

où nous sous-entendons que sous $\mathbb{P}_x$ le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est issu de x.

Solution de l'exercice 2. Par la formule de Tanaka

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \mathrm{sign}(B_s)\,\mathrm{d}B_s + L_t, \qquad t \geq 0.$$

Soit $f(x) := \exp\left(-\sqrt{2\lambda}\,x\right)$. On remarque que $f'' = 2\lambda f$. Par la formule d'Ito

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda t} f(|B_t|) = \\
&= f(|B_0|) + \int_0^t e^{-\lambda s}\left(-\lambda f(|B_s|)\,\mathrm{d}s + f'(|B_s|)(\mathrm{sign}(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \,\mathrm{d}L_s) + \frac{1}{2}f''(|B_s|)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= f(|B_0|) - \sqrt{2\lambda}\int_0^t \exp\left(-\lambda s - \sqrt{2\lambda}\,|B_s|\right)(\mathrm{sign}(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \,\mathrm{d}L_s)
\end{aligned}$$

où $\left(\exp\left(-\lambda s - \sqrt{2\lambda}\,|B_s|\right)\mathrm{sign}(B_s)\right)_{s\in[0,t]}$ est borné et l'intégrale stochastique définit donc une martingale continue et dans L^2. En considérant l'espérance nous obtenons donc

$$\exp\left(-\sqrt{2\lambda}\,x\right) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\sqrt{2\lambda}\,|B_t|\right)\right] + \sqrt{2\lambda}\,\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \exp\left(-\lambda s\right)\,\mathrm{d}L_s\right]$$

puisque p.s. pour $\mathrm{d}L_s$-tout $s \geq 0$, $|B_s| = 0$. Si $t \to +\infty$ par convergence monotone nous obtenons la formule souhaitée.

Exercice 3. Soit $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^∞ et avec b', b'', σ' et σ'' bornées sur $\mathbb{R}$. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ et $(X_t(x))_{t\geq 0}$ la seule solution de l'équation

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}.$$

Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R})$ on note $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}}|f|$ et l'on définit $u(t,x) := P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))]$.

(1) Soit x fixé et $\eta_t^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x))$. Montrer que $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$ satisfait une EDS du type
$$\mathrm{d}\eta_t^\varepsilon(x) = (h_t^\varepsilon\,\mathrm{d}t + k_t^\varepsilon\,\mathrm{d}B_t)\eta_t^\varepsilon(x) \tag{1}$$
avec h^ε et k^ε des processus progressivement mesurables et bornés.

(2) Considérer le processus auxiliaire $\zeta_t := \exp(-\int_0^t k_s^\varepsilon\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}s - \int_0^t h_s^\varepsilon\,\mathrm{d}s)$ et donner une expression explicite pour $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$.

(3) Montrer que pour toute sous-suite $(\varepsilon_n)_n$ il existe une sous-sous-suite $(n_k)_k$ telle que p.s. $\eta_t^{\varepsilon_{n_k}}(x) \to \eta_t(x)$ pour tout $t \geq 0$, où $(\eta_t(x))_{t\geq 0}$ est un processus continu solution d'un analogue de (1) et qui ne dépend pas des sous-suites considérées. En déduire que $\frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x)) \to \eta_t(x)$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$.

(4) Si $f \in C_b^1(\mathbb{R})$, montrer que $P_t f$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}$, donner une formule pour $\partial_x P_t f(x)$ et montrer que $\sup_{t\in[0,T]}\|\partial_x P_t f\|_\infty < +\infty$.

(5) Soit $t > 0$ fixé et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. On peut admettre que $(t, x) \mapsto u(t, x)$ est de classe C^∞ et que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 P_t f\right\|_\infty < +\infty.$$

Montrer que le processus $(u(t-s, X_s(x)))_{s\in[0,t]}$ est une martingale, et trouver un processus explicite $(\alpha_s^t)_{s\in[0,t]}$ tel que

$$f(X_t(x)) = u(t, x) + \int_0^t \alpha_s^t \, \mathrm{d}B_s. \tag{2}$$

Donner une majoration de $\mathbb{E}((\alpha_s^t)^2)$.

(6) On suppose que $\sigma \geq \delta > 0$. Multiplier (2) par $\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\, \eta_s(x)\, \mathrm{d}B_s$, utiliser l'isométrie d'Ito et le théorème de dérivation des fonctions composées, pour arriver à la formule

$$\partial_x u(t, x) = \frac{1}{t}\, \mathbb{E}\left[f(X_t(x)) \int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\, \eta_s(x)\, \mathrm{d}B_s\right].$$

Quelle interprétation peut-on donner de cette formule ?

Solution de l'exercice 3. (1) Soit x fixé et $\eta_t^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x))$. Montrer que $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$ satisfait une EDS du type

$$\begin{aligned}
\eta_t^\varepsilon(x) &= \frac{X_t(x+\varepsilon) - X_t(x)}{\varepsilon} \\
&= 1 + \int_0^t \frac{b(X_s(x+\varepsilon)) - b(X_s(x))}{\varepsilon}\, \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\sigma(X_s(x+\varepsilon)) - \sigma(X_s(x))}{\varepsilon}\, \mathrm{d}B_s \\
&= 1 + \int_0^t \frac{b(X_s(x+\varepsilon)) - b(X_s(x))}{X_s(x+\varepsilon) - X_s(x)}\, \eta_s^\varepsilon(x)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\sigma(X_s(x+\varepsilon)) - \sigma(X_s(x))}{X_s(x+\varepsilon) - X_s(x)}\, \eta_s^\varepsilon(x)\, \mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

et donc le résultat souhaité est vrai avec

$$h_s^\varepsilon := \frac{b(X_s(x+\varepsilon)) - b(X_s(x))}{X_s(x+\varepsilon) - X_s(x)}, \qquad k_s^\varepsilon := \frac{\sigma(X_s(x+\varepsilon)) - \sigma(X_s(x))}{X_s(x+\varepsilon) - X_s(x)},$$

qui sont des processus adaptés continus (donc progressivement mesurables) et bornés par les hypothèses sur b' et σ'.

(2) Soit $\zeta_t := \exp(-\int_0^t k_s^\varepsilon\, \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2\, \mathrm{d}s - \int_0^t h_s^\varepsilon\, \mathrm{d}s)$. Alors par la formule d'Ito

$$\zeta_t = 1 + \int_0^t \zeta_s \left(-k_s^\varepsilon\, \mathrm{d}B_s + (k_s^\varepsilon)^2\, \mathrm{d}s - h_s^\varepsilon\, \mathrm{d}s\right)$$

et en notant $\eta_s^\varepsilon := \eta_s^\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned}
\zeta_t \eta_t^\varepsilon &= 1 + \int_0^t (\zeta_s\, \mathrm{d}\eta_s^\varepsilon + \eta_s^\varepsilon\, \mathrm{d}\zeta_s) + \langle \zeta, \eta^\varepsilon\rangle_t \\
&= 1 + \int_0^t \left(\zeta_s \eta_s^\varepsilon (k_s^\varepsilon\, \mathrm{d}B_s + h_s^\varepsilon\, \mathrm{d}s) + \eta_s^\varepsilon \zeta_s(-k_s^\varepsilon\, \mathrm{d}B_s + (k_s^\varepsilon)^2\, \mathrm{d}s - h_s^\varepsilon\, \mathrm{d}s)\right) - \int_0^t \zeta_s\, \eta_s^\varepsilon (k_s^\varepsilon)^2\, \mathrm{d}s \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\eta_t^\varepsilon(x) = \exp\left(\int_0^t k_s^\varepsilon \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^t h_s^\varepsilon \,\mathrm{d}s\right), \qquad t \geq 0.$$

Il s'en suit que $\mathbb{E}(|\frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon)-X_t(x))-\eta_t(x)|\wedge 1) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, ce qui est équivalent à la convergence en probabilité demandée.

(3) Quand $\varepsilon \to 0$, nous avons par convergence dominée et par l'isométrie d'Ito que

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t k_s^\varepsilon \,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \sigma'(X_s(x)) \,\mathrm{d}B_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(k_s^\varepsilon - \sigma'(X_s(x))\right)^2 \,\mathrm{d}s\right) \to 0.$$

Or la convergence dans L^2 implique que de toute sous-suite l'on peut extraire une sous-sous-suite convergeant p.s. vers la même limite. L'expression explicite pour η^ε montre que pour toute sous-suite $(\varepsilon_n)_n$ il existe une sous-sous-suite $(n_k)_k$ telle que p.s. $\eta_t^{\varepsilon_{n_k}}(x) \to \eta_t(x)$ pour tout $t \geq 0$, où

$$\eta_t(x) = \exp\left(\int_0^t \sigma'(X_s(x)) \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma'(X_s(x)))^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^t b'(X_s(x)) \,\mathrm{d}s\right), \qquad t \geq 0.$$

On voit bien que

$$\eta_t(x) = 1 + \int_0^t \sigma'(X_s(x))\, \eta_s(x) \,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b'(X_s(x))\, \eta_s(x) \,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

(4) Si $f \in C_b^1(\mathbb{R})$, nous avons

$$\frac{f(X_t(x+\varepsilon) - f(X_t(x))}{\varepsilon} = \frac{f(X_t(x+\varepsilon) - f(X_t(x))}{X_t(x+\varepsilon) - X_t(x)}\, \eta_t^\varepsilon(x) \to f'(X_t(x))\eta_t(x)$$

en probabilité quand $\varepsilon \to 0$. Or $(\eta_t^\varepsilon(x))_{\varepsilon>0}$ est une famille uniformément intégrable, puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\eta_t^\varepsilon(x))^2\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(2\int_0^t k_s^\varepsilon \,\mathrm{d}B_s - \int_0^t (k_s^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}s + 2\int_0^t h_s^\varepsilon \,\mathrm{d}s\right)\right) \\ &\leq e^{Mt}\mathbb{E}\left(\exp\left(2\int_0^t k_s^\varepsilon \,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (2k_s^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}s\right)\right) = e^{Mt}\end{aligned}$$

où M est telle que $(k_s^\varepsilon)^2 + 2|h_s^\varepsilon| \leq M$. Nous pouvons donc passer à la limite sous le signe d'espérance et obtenir

$$\partial_x P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f'(X_t(x))\, \eta_t(x)\right]. \tag{3}$$

Le même argument montre que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_x P_t f\|_\infty \leq e^{MT}\|f'\|_\infty.$$

(5) Soit $t > 0$ fixé et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. On peut admettre que $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est de classe C^∞ et que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 P_t f\right\|_\infty < +\infty.$$

On a pour $0 \leq r \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(P_{t-s}f(X_s(x)) \,|\, \mathscr{F}_r) = P_{s-r}P_{t-s}f(X_r) = P_{t-s}f(X_r)$$

et donc $(u(t-s, X_s(x)))_{s\in[0,t]}$ est une martingale. On applique la formule d'Ito à $(u(t-s, X_s(x)))_{s\in[0,t]}$:

$$\begin{aligned} u(0, X_t(x)) &= u(t,x) + \int_0^t \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u\right)(t-s, X_s(x))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \partial_x u(t-s, X_s(x))\,\sigma(X_s(x))\,\mathrm{d}B_s \\ &= u(t,x) + \int_0^t \partial_x u(t-s, X_s(x))\,\sigma(X_s(x))\,\mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

car le terme à variation bornée doit être nul puisque le processus considéré et une martingale ($\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal de X). Nous avons donc

$$f(X_t(x)) = u(t,x) + \int_0^t \alpha_s^t\,\mathrm{d}B_s, \qquad \alpha_s^t := \partial_x u(t-s, X_s(x))\,\sigma(X_s(x)), \quad s \in [0,t].$$

(6) On multiplie (2) par $\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s$, et à droite l'on obtient

$$\mathbb{E}\left(u(t,x)\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s\right) = u(t,x)\mathbb{E}\left(\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s \int_0^t \sigma(X_s(x))\,\partial_x u(t-s, X_s(x))\,\mathrm{d}B_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \eta_s(x)\,\partial_x u(t-s, X_s(x))\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \int_0^t \partial_x \mathbb{E}\left(u(t-s, X_s(x))\right)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \partial_x u(t,x)\,\mathrm{d}s = t\partial_x u(t,x). \end{aligned}$$

Donc nous avons obtenu pour $t > 0$

$$\partial_x u(t,x) = \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left(f(X_t(x))\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s\right).$$

Cette formule est intéressante car elle donne une expression pour la dérivée en x de u en termes d'une intégrale sur l'espace des trajectoires où on a f mais pas f', comme c'est par contre le cas dans (3). Il s'agit d'un example de formule d'intégration par partie sur l'espace des trajectoires.