Travaux dirigés, feuille 4

Le processus du restaurant chinois

Soit $\theta > 0$ un paramètre. Des individus numérotés $1, 2, \ldots$ arrivent successivement à la cantine, qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Le premier individu s'assied à une table. Puis, lorsque le $k+1$-ème individu se présente ($k \geq 1$), il choisit au hasard l'un des k individus déjà attablés avec la probabilité $1/(k+\theta)$ et s'assied à la même table, ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\theta/(k+\theta)$, indépendamment de ce qui s'est passé avant.

On note K_n la variable aléatoire égale au nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place, et

$$p_{n,i} = \mathbf{P}(K_n = i) \ , \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Partie A:

1. Montrer que $p_{n+1,1} = \frac{n!}{(n+\theta)(n-1+\theta)\ldots(1+\theta)}$.
   Trouver une relation entre $p_{n+1,i}, p_{n,i}$ et $p_{n,i-1}$, pour $2 \leq i \leq n$.

2. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la fonction génératrice de K_n qu'on note P_n :

   $$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i} x^i \ , \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   En conclure que

   $$P_n(x) = \frac{R_n(\theta x)}{R_n(\theta)} \ , \qquad R_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i) \ .$$

3. Calculer $\mathbf{E}(K_n)$ et $\mathrm{Var}(K_n)$ à l'aide de cette formule. (Laisser le résultat sous la forme d'une somme.)

Partie B:

1. Montrer, à partir de sa définition, que K_n s'écrit

   $$K_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

   avec $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes dont on précisera les paramètres $q_1, \ldots, q_n$.

2. Retrouver, à l'aide de (1), les expressions obtenues précédemment pour $\mathbf{E}(K_n)$ et $\mathrm{Var}(K_n)$.

3. Montrer que
$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta + x}\, dx \le \mathbf{E}(K_n) \le 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta + x}\, dx \ ,$$
et en déduire un équivalent de $\mathbf{E}(K_n)$.

4. Montrer que $\mathrm{Var}(K_n) \le \mathbf{E}(K_n)$.
En déduire que $\frac{K_n}{\ln n}$ converge dans L^2 et en probabilité vers θ quand $n \to \infty$.

5. Calculer la fonction caractéristique Φ_{K_n} de K_n.
Trouver une suite $c_n \to \infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} \log \Phi_{K_n - \mathbf{E}K_n}(t/c_n) = -t^2/2$.
En déduire la limite en loi de $(K_n - \mathbf{E}K_n)/\sqrt{\log n}$.