Travaux dirigés, feuille 3 : Convergences de variables aléatoires

Convergence p.s., en probabilité, dans L^p

Exercice 1
Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. ayant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant $\mathbb{P}(X_i = 0) < 1$. Les suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

admettent-elles une limite p.s. quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2
Soit f continue sur $[0,1]$. Trouver la limite de la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right) d\lambda_n(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de Cauchy de paramètre a. On rappelle que la densité d'une telle loi est $x \mapsto \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, et sa fonction caractéristique est $t \mapsto e^{-a|t|}$.

a) Quelle est, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$?

b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ne peut converger p.s. vers aucune constante finie ou non.

Exercice 4
Soit $a > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. dont la loi est donnée par

$$X_n = \begin{cases} n^a - 1 & \text{avec probabilité} \quad n^{-a} \\ -1 & \text{avec probabilité} \quad 1 - n^{-a} \end{cases}$$

Sauf avis contraire, on ne suppose pas les $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendants.

1) a) Quelle est la limite de $(X_n)_{n\geq 1}$ en probabilité ?

b) Calculer $\mathbb{E}[X_n]$. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 ? dans L^p $(p \geq 1)$?

c) Donner une condition suffisante sur a pour que p.s. $X_n = -1$ à partir d'un certain rang.

On pose $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

2) a) On suppose $a > 1$. Que vaut la limite de la suite de variables aléatoires $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$? Précisez si la convergence a lieu en probabilité, p.s., dans L^1 et/ou dans L^p.

b) On suppose maintenant que $a \in]0,1[$ et que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Calculer la limite de $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]$. En déduire que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers 0.

Convergence en loi

Exercice 5
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. positives indépendantes et de même loi ayant une densité f telle que $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \theta > 0$. On pose $Z_n = n$ Min $(X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que Z_n converge en loi et déterminer sa limite.

b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(\limsup\{nX_n \leq a\}) = 1$. En déduire que p.s. $\liminf Z_n = 0$. Z_n converge-t-elle p.s. ?

Exercice 6
Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}$.
Indication : on utilisera un TCL.

Exercice 7
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires strictement positives de même loi et ayant un moment d'ordre 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires de Bernoulli $\{0, 1\}$ de paramètres respectifs α et β dans $]0, 1[$. On suppose que la famille de variables aléatoires $(X_m,\ U_n,\ V_p\ ; n,\ m,\ p \geq 1)$ est indépendante. On définit, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} U_k X_k,\ T_n = \sum_{1\leq k\leq n} V_k X_k$.

1) Etablir que, lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{S_n}{T_n}$ tend presque sûrement vers une constante a que l'on déterminera.

2) Etablir que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - aT_n)\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 8
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$.

a) Montrer que la série de terme général $2^{-n}X_n$ converge pour tout ω. On note S sa somme et S_n la n-ième somme partielle de la série.

b) Montrer que la fonction caractéristique de S_n est donnée par : $\Phi_{S_n}(t) = \dfrac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$.

c) Montrer que S est de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 9
Soit X_n une suite de v.a.r. i.i.d., de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soir $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{X_k}$.

1) Soit Φ_{U_n} la fonction caractéristique de U_n. Montrer que $\Phi_{U_n}(t) = \exp(n \ln(1 - v_n(t)))$ pour n assez grand, où la fonction v_n satisfait $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = 0$.

2) Etudier la convergence en loi de U_n.

Indication : on utilisera (sans preuve) l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \pi/2$.

3) En déduire que

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{X_k}\right| > n\,\frac{\pi}{2}\right] \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$