Travaux dirigés, feuille 2 : Variables aléatoires réelles

Exercice 1

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de loi uniforme sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x < 1\}$.

a) Déterminer la loi du couple (U, V) où $U = X - Y$ et $V = \frac{Y}{X}$.

b) Quelles sont les lois de U et de V ?

c) U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose connue une suite $(U_n, Z_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que, pour chaque n, les v.a.r. U_n et Z_n soient indépendantes et que la loi de U_n soit uniforme sur $[0, 1]$ et la loi de Z_n ait pour densité g par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f \leq ag$. On pose $T = \inf\{n \geq 1 \,|\, aU_n g(Z_n) \leq f(Z_n)\}$ et $X = Z_T$ ($\inf \emptyset = \infty$ et $Z_\infty = 0$).

1) Calculer la loi de T et son espérance.

2) Montrer que la loi de X a pour densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.r. i.i.d. et intégrables, et soit M une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ intégrable elle aussi. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $\{M = k\}$ est dans la tribu $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$.

1) Montrer que $\mathbb{E}(M) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(M \geq i)$.

2) Montrer que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M} X_i\right] = \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(X_1)$.

Problème

1) Soient $Z_1, \ldots, Z_n$ des v.a.r. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre l. On pose, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$.

a) Quelle est la loi de $(S_1, \ldots, S_n)$?

b) Quelle est la loi de $(\frac{S_1}{S_2}, \frac{S_2}{S_3}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{S_n})$? Que peut-on en déduire sur cette famille de variables ?

2) Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Montrer que p.s. il existe une unique permutation (aléatoire) σ sur $\{1, ..., n\}$ telle que $X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}$.
Indication : cela revient à montrer que $\mathbb{P}[\cup_{i \neq j}\{X_i = X_j\}] = 0$.

Soit $(Y_1, ..., Y_n)$ les n variables aléatoires définies par

$$Y_i = X_{\sigma(i)} \quad \text{si } \sigma \text{ est bien défini et} \quad Y_i = 0 \quad \text{sinon.}$$

b) Si τ est une permutation déterministe sur $\{1, ..., n\}$ montrer que $\mathbb{P}_{(X_{\tau(1)}, ..., X_{\tau(n)})} = \mathbb{P}_{(X_1, ..., X_n)}$.

c) En déduire que la loi de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.
Indication : on remarquera que pour toute fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,

$$g(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{\tau \in \Sigma_n} g(X_{\tau(1)}, ..., X_{\tau(n)}) \mathbb{1}_{X_{\tau(1)} < \cdots < X_{\tau(n)}} \quad p.s.,$$

où Σ_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$.

3) a) Déterminer la loi de $(\frac{Y_1}{Y_2}, \ldots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n})$. Comparer avec le résultat de la question 1 b.

b) Déterminer la loi de $(\frac{S_1}{S_n}, \frac{S_2}{S_n}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{S_n})$. Comparer avec le résultat de la question 2.

Pour s'entrainer sur les changements de variables différentiables, voir aussi dans [GK] l'exercice 6.12.1 p. 174 sur la loi de Dirichlet et l'exercice 61 p. 182 sur le volume de la boule unité en dimension n.