

Feuille de TD 5 : Systèmes linéaires.

Exercice 1. Déterminer, en fonction des paramètres $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + \alpha y = a \\ \alpha x + y = b. \end{cases}$$

Exercice 2. À quelle condition sur a, b et c le système de trois équations à deux inconnues x et y

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = b \\ x + 3y = c \end{cases}$$

admet-il une solution ?

Cette solution est-elle alors unique ?

Exercice 3. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 3y + 3z = 2. \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} a) & \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ b) & \begin{cases} x + -y + z = 0 \\ -x + y + -z = 0 \end{cases} \\ c) & \begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases} \quad (\text{discuter selon les valeurs de } m \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Exercice 5. Décrire, en fonction des valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + y + z = 0 \end{cases} .$$

Exercice 6. Résoudre le système de cinq équations à cinq inconnues :

$$x_1 + x_2 = a_1, x_2 + x_3 = a_2, x_3 + x_4 = a_3, x_4 + x_5 = a_4, x_5 + x_1 = a_5 .$$

Exercice 7. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = a_1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = a_2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = a_3 . \end{cases}$$

Exercice 8. Déterminer, selon les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions dans du système

$$\begin{cases} ax + by + z = 0 \\ x + aby + z = 0 \\ x + by + az = 0 . \end{cases}$$