Université Denis Diderot Paris VII 2012-2013
Algèbre et Analyse élémentaires I

Feuille de TD 4 : Polynômes

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par $Q \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

1. $P(X) = 2X^3 + 4X - 1, Q(X) = X - 1$
2. $X^4 + iX^3 + (1-i)X^2 + 2X - 1, Q(X) = X^2 - iX + 1$
3. $X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1, Q(X) = 2X^3 + X - 1$
4. $P(X) = X^n - 1, Q(X) = X - 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 2. Soient $P(X) = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ et $Q(X) = X^3 - 2X + 1$ où $a, b \in \mathbb{C}$.
1) Faire la division euclidienne de P par Q.
2) Déterminer a, b pour que Q divise P.

Exercice 3. Les polynômes $X^5 + X^4 + X - 2$ et $X^3 - X + 1$ ont-ils une racine commune ?

Exercice 4. Soit $n > 2$ un entier.
Montrer que le polynôme $X(X+1)(2X+1)$ divise $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

Exercice 5. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$ après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine.

Exercice 6. Soit pour tout $k \in \mathbb{R}$ le polynôme $P_k(X) = X^3 - 3X + k$ de $\mathbb{R}[X]$.
1) Déterminer tous les réels k tels que le polynôme P_k a une racine double.
2) Scinder pour chacun de ces réels k le polynôme P_k.

Exercice 7. On se propose de factoriser le polynôme $P(X) = 2X^4 - 7X^3 - 26X^2 - 7X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
1) En utilisant la symétrie des coefficients de P, montrer que l'équation $P(X) = 0$ équivaut à

$$2(X^2 + \frac{1}{X^2}) - 7(X + \frac{1}{X}) - 26 = 0(*)$$

2) On pose $Y = X + \frac{1}{X}$.
Exprimer Y^2 en fonction de X^2, puis mettre l'équation $(*)$ sous la forme : $aY^2 + bY + c = 0$.
En déduire les solutions de l'équation $(*)$.
3) Scinder le polynôme P.

Exercice 8. On considère le polynôme $P(X) = 3X^7 - 4X^6 - 3X + 4$.
1) Scinder le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Factoriser en produit de facteurs irréductibles le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9. Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
1) Calculer le degré de P.
2) Montrer que $P(X)$ a au moins deux zéros réels entiers. Puis déterminer leur ordre de multiplicité.
3) Démontrer que $P(X)$ est divisible par $X - j$, où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
4) Factoriser $P(X)$ dans $C[X]$ puis dans $R[X]$.

Exercice 10. Soit le polynôme :$P(X) = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$.
1) Montrer que $-i$ est une racine de P. Préciser son ordre de multiplicité.
2) Calculer les racines de P.

Exercice 11. (Polynômes de Legendre)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ des complexes distincts 2 à 2.
On définit les polynômes :

$$L_i(X) = \Pi_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

1) Donner le degré de L_i et les valeurs $L_i(a_j)$ pour tout entier i et j tel que $1 \leq i, j \leq n$.
2) Soient $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$. Déterminer l'unique polynôme P de degré au plus $n-1$ vérifiant $P(a_i) = b_i$ pour tout entier naturel $i \leq n$.

Exercice 12. Soient $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de la division de $P(X)$ par $X+1$ soit 2 et le reste de la division de $P(X)$ par $X-1$ soit -4.
Quel est le reste de la division de $P(X)$ par $X^2 - 1$?

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Sans effectuer de division euclidienne, déterminer le reste de la division de

$$P(X) = (cos(a) + Xsin(a))^n \text{ par } Q(X) = X^2 + 1$$

Exercice 14. Soit $n > 1$. Calculer le reste de la division euclidienne de

$$P(X) = X^n + X + 1 \text{ par } (X-1)^2$$

.

Exercice 15. Déterminer les polynômes P de degré au plus 3 tel que

$$P(1) = P'(1) = 2, P''(1) = 12 \text{ et } P(2) = 3$$