Feuille de TD 3

Exercice 1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2. 1. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i \quad ; \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i \quad ; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i \quad ; \quad z_4 = -2 \quad ; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

2. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$.

Exercice 3. Ecrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$i, \quad 3+4i, \quad -2+2i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{1-i}.$$

Exercice 4. 1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E1)\ \ z^2+z+1=0\ ; \quad (E2)\ \ z^2-(1+2i)z+i-1=0\ ; \quad (E3)\ \ z^2-\sqrt{3}z-i=0\ ;$$

$$(E4)\ \ z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ; \quad (E5)\ \ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ; \quad (E6)\ \ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$(E7)\ \ z^4+10z^2+169=0\ ; \quad (E8)\ \ z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 6. Soit x un nombre réel.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$
2. Ecrire $(\cos(x))^5$ sous la forme $a_1\cos(x)+a_2\cos(2x)+a_3\cos(3x)+a_4\cos(4x)+a_5\cos(5x)$ où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont des réels indépendants de x.

Exercice 7. Soit a un nombre réel. Calculer $\cos(5a)$ et $\sin(5a)$ en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$.
Montrer que $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 8. 1. Donner les racines cinquièmes de $\frac{1+i}{1-i}$.

2. Sachant que $(2+4i)^6 = 7488+2816i$, donner les racines sixièmes de $7488+2816i$.

Exercice 9. 1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^2-z+1-i=0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\quad z^{2n}-z^n+1-i=0$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$(1+i)^n + (1-i)^n \quad \text{et} \quad (1+i)^n - (1-i)^n.$$

Exercice 11. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 + \bar{z} + 1$ est réel.

Exercice 12. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixe respective $a = 5 - 4i$, $b = -1 - 4i$, $c = -4 - i$.

1. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et soit M' son image par S d'affixe z'. Montrer que $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.
3. Donner le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.
4. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et soit M' son image par S d'affixe z'. Montrer que $\omega - z' = i(z - z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega M M'$.

Exercice 13. Pour n entier naturel et θ réel, on pose

$$A_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad B_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta).$$

Calculer $A_n(\theta)$ et $B_n(\theta)$ en fonction de n et de θ.

Indication : il faut savoir écrire $1 + e^{i\theta}$ sous la forme ae^{ib} avec a et b réels.

En déduire les formules

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad (n \geq 0) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad (n \geq 1).$$