M2 Enseignants. Probabilités
Examen du 24 juin 2013.

Ce sujet comporte quelques questions de cours indiquées par **(QC)** : on vous demande d'y répondre sans aucune justification. En revanche, dans les autres questions, une argumentation précise est attendue.

Dans tous les exercices, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé sous-jacent.

1 Tram

(QC) On considère que le temps T qui s'écoule entre le passage de deux tramways à la station «Avenue de France» suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsqu'on prend pour unité de temps la minute.
Une étude statistique montre que le temps moyen s'écoulant entre le passage de deux tramways à cette station vaut 9 minutes. Donnez la valeur de λ.

2 Filtre anti-spam

Un logiciel de messagerie électronique est muni d'un filtre censé détecter les messages indésirables. On suppose que 30% du courrier reçu est indésirable, que 80% du courrier indésirable contient le mot «viagra» tandis que seulement 1% du courrier acceptable contient ce mot.
Le filtre est rudimentaire : dès qu'il repère le mot «viagra» dans un courrier électronique entrant, il le range dans un répertoire spécial appelé «Courriers Indésirables». Sachant qu'un courrier a été rangé dans ce répertoire par le filtre, quelle est la probabilité pour qu'il soit réellement indésirable ? (vous pouvez donner le résultat sous forme de fraction)

3 Loi normale

On appelle G la fonction de répartition de la loi gaussienne (ou normale) centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs prises par G.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$G(x)$	0,6915	0,8413	0,9332	0,9772	0,9938	0,9986

1. **(QC)** Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. En appliquant une transformation affine à X, donnez un exemple de variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
2. On prend encore $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Démontrez l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P(|X| \geq x) = 2(1 - G(x))$$

3. Une usine fabrique des billes d'acier de diamètre 8 mm. En tenant compte des erreurs d'usinage, le diamètre d'une bille (en millimètres) est en réalité une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(8; 0,01)$.
   Lors du contrôle de fabrication, on met au rebut les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7,8 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8,2 mm. Quelle est la probabilité pour une bille d'être mise au rebut ?

4 Taux de panne

Une unité de temps étant choisie dans tout l'énoncé (l'heure par exemple), on considère une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui représente la durée de vie (arrondie à l'entier inférieur le plus proche) d'un certain matériel.
Nous supposerons que $P(T \geq n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et nous appellerons *taux de panne* de ce matériel la suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \theta_k := P(T = k \mid T \geq k)$$

1. Justifier la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T = n) = P(T \geq n) - P(T \geq n+1)$$

2. Justifier l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T \geq n+1 | T \geq n) = 1 - \theta_n$$

et en déduire que $\theta_n \in [0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(T = n)$ en fonction de la suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
4. Nous supposons dans cette question que le composant électronique ne vieillit pas, c'est-à-dire que son taux de panne est constant :

$$\exists a \in]0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n = a$$

Dans ce cas, que vaut la loi de probabilité de la variable aléatoire T ?

5. Contrairement aux questions précédentes dans lesquelles nous raisonnions en *temps discret* (à valeurs entières), nous considérons maintenant la durée de vie en *temps continu* (réel positif) d'un certain matériel. Nous supposons que cette durée de vie est représentée par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, admettant une densité de probabilité f et telle que $P(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.
(QC) Si le matériel considéré ne vieillit pas, c'est-à-dire si :

$$\forall s > 0 \quad \forall t > 0 \quad P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

quel type de loi la variable aléatoire réelle X suit-elle ?

6. Nous supposons que X suit la loi faisant l'objet de la question de cours précédente. En notant $[x]$ la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire l'unique entier p tel que $p \leq x < p + 1$, nous définissons $T := [X]$. Prouver que T est bien une variable aléatoire discrète puis déterminer sa loi.

5 Simulation d'une variable aléatoire

1. **(QC)** Nous noterons $\mathcal{U}_{[a,b]}$ la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Tracer le graphe de la fonction de répartition de cette loi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une densité de probabilité telle que $f(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et la restriction de l'application f à $\mathbb{R}_+$, notée $f_{|\mathbb{R}_+}$, est continue et strictement positive : $f_{|\mathbb{R}_+} \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$.
Montrer que la fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée à la densité de probabilité f vérifie $F(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

3. Montrer que la restriction de F à $\mathbb{R}_+$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $[0,1[$.
   Nous noterons $F^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}_+$ sa bijection réciproque (on rappelle qu'elle est aussi strictement croissante).
4. Soit $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Justifier l'égalité suivante :
$$P(X \in [0,1[\,) = 1$$
   Nous pourrons donc considérer désormais sans inconvénient que la variable aléatoire X est à valeurs dans $[0,1[$.
5. On définit $Y := F^{-1}(X)$ en admettant que Y est bien une variable aléatoire réelle. Montrer que la fonction de répartition F_Y de cette variable vérifie $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et calculer la valeur de $F_Y(x)$ pour tout $x \geq 0$.
6. Déduire de la question précédente que Y suit la loi de densité de probabilité f.
7. On suppose qu'un ordinateur nous permet de simuler une variable aléatoire $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Comment simuler une variable aléatoire $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$?
8. On appelle *loi de Rayleigh* de paramètre $\alpha > 0$ et l'on note $\mathcal{R}(\alpha)$ la loi de densité de probabilité $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = 0$ si $x < 0$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_\alpha(x) := \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)$$
   Vérifier que f_α est bien une densité de probabilité.
9. À partir de la simulation d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, comment simuler une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{R}(\alpha)$?