Indications pour les leçons

Thierry MEYRE

Préparation à l'agrégation interne. Université Paris Diderot

1 Séries numériques

1.1 Exs d'étude de la convergence de séries numériques

1.1.1 Présentation motivée

Il est souhaitable d'aborder les thèmes suivants :

1. Pour les séries à termes positifs :
   - critères de comparaison : domination, prépondérance, équivalence, règles de D'Alembert, Cauchy et éventuellement Raabe-Duhamel
   - comparaison avec une intégrale
2. Pour les séries à termes réels ou complexes :
   - critère de Cauchy et convergence absolue
   - critère des séries alternées
   - règle d'Abel (noter que le critère précédent en est un cas particulier)
   - utilisation d'un développement asymptotique

1.1.2 Quelques suggestions

► Soit $\alpha > 0$ fixé et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et la récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

[MONIER cours MP 237] ramène cet exercice à l'étude de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ et conclut grâce aux théorèmes de comparaison (majoration, équivalence).

► On note p_n le n^e nombre premier $(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5 \cdots)$. Montrer la divergence de la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$$

Malgré une preuve un petit peu technique, [MONIER exos MP 296] établit ce résultat par des théorèmes élémentaires de comparaison.

► Soit $f \in C_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est non nulle. Pour tout $t > 0$, prouver la convergence de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(nt)$$

et donner un équivalent de sa somme lorsque $t \to 0^+$.

[GOURDON 155] donne, outre la preuve par comparaison à une intégrale, une application de ce résultat à l'étude de la somme d'une certaine série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} \text{ lorsque } x \to 1^-$$

▶ Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Cet exemple [GOURDON 214] illustre l'importance de l'hypothèse de décroissance dans le critère des séries alternées puisque la série converge si et seulement si $\alpha > 1/2$. On utilise un développement asymptotique pour obtenir ce résultat.

1.2 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique

1.2.1 Présentation motivée

Une organisation possible par thème est la suivante :
- utilisation des séries géométriques
- séries "téléscopiques" $\sum(u_{n+1} - u_n)$
- séries entières
- séries de Fourier : théorème de Dirichlet, égalité de Parseval

1.2.2 Quelques suggestions

▶ [MONIER cours MP 266] illustre l'utilisation des séries géométriques par le calcul des sommes des séries suivantes lorsque $(x, \theta) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geq 0} x^n \cos(n\theta) \quad , \quad \sum_{n\geq 0} x^n \sin(n\theta)$$

▶ [MONIER cours MP 266] calcule la somme de la série suivante lorsque $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

en faisant apparaître une série télescopique.

▶ En utilisant la convergence uniforme sur le rayon $[0, z_0]$ d'une série entière telle que $\sum a_n z_0^n$ converge, [DANTZER 311 et 316] prouve les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

▶ En calculant les coefficients de Fourier d'une fonction "créneau" impaire 2π-périodique, [MONIER cours MP 423-424] retrouve l'égalité précédente par Dirichlet et démontre par Parseval :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

De même, en partant de l'application 2π-périodique, paire et égale à l'identité sur $[0, \pi]$, il retrouve l'égalité précédente par Dirichlet et démontre par Parseval :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

▶ Un exercice moins classique est fourni par [GOURDON 210] qui calcule la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} \quad \text{où} \quad b - a > 1$$

Il utilise pour cela la règle de Raabe-Duhamel et travaille ensuite directement sur les sommes partielles pour obtenir, par passage à la limite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}$$

1.3 Exs d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes

Toute série absolument convergente est convergente mais la réciproque est fausse : un contre-exemple élémentaire donné par [MADERE 181] est la série $\sum u_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{2n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{-1}{n+1}$$

Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*. Dans cette leçon, nous nous intéresserons surtout à ce type de séries, même si nous rencontrerons aussi des séries divergentes.

► Le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes peut diverger. [HAUCHECORNE 126] cite un exemple dû à Cauchy : on considère la série produit $\sum w_n$ de $\sum u_n$ par elle-même, avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$ et l'on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \right| \geq 1.$$

Notons que le *théorème de Mertens* (hors programme) affirme que le produit de Cauchy d'une série absolument convergente par une série convergente est toujours une série convergente.

► Le critère des séries alternées nous fournit un moyen simple de mettre en évidence des séries semi-convergentes, comme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ pour $0 < \alpha \leq 1$. Voici une application moins élémentaire de ce critère :
Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Cet exemple [GOURDON 214] illustre l'importance de l'hypothèse de décroissance dans le critère des séries alternées puisque la série est absolument convergente pour $\alpha > 1$, semi-convergente pour $1 \geq \alpha > 1/2$ et divergente pour $1/2 \geq \alpha > 0$. On utilise un développement asymptotique pour obtenir ce résultat.

Nous obtenons des séries alternées dont nous pouvons calculer exactement la somme en utilisant la convergence uniforme sur le rayon $[0, z_0]$ d'une série entière telle que $\sum a_n z_0^n$ converge :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

[DANTZER 311 et 316]

► La règle d'Abel permet de mettre en évidence des séries semi-convergentes à valeurs complexes, comme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \quad , \quad \alpha \in]0,1] \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}\backslash(2\pi\mathbb{Z})$$

[GOURDON 207]
Notons que le critère des séries alternées est un cas particulier de la règle d'Abel.
Notons encore que la règle d'Abel peut s'énoncer comme suit :

Proposition 1.1 *Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes telles que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0*
2. *La série $\sum |\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est convergente*
3. *La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n b_n$ est convergente.

[HAUCHECORNE 116] en déduit que la série suivante est convergente, alors qu'il n'est pas possible d'appliquer directement le critère des séries alternées :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$$

► Contrairement aux séries absolument convergentes, qui sont commutativement convergentes avec invariance de la somme, modifier l'ordre des termes d'une série semi-convergente peut soit modifier sa nature, soit modifier sa somme. [HAUCHECORNE 123-124] illustre ces deux possibilités par des exemples faisant intervenir la série harmonique.

2 Séries d'applications

2.1 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples

Le cadre énoncé par le programme est celui des séries $\sum f_n$, où $f_n : E \to F$, E ensemble quelconque et F espace de Banach.
Il y a un certain nombre de notions incontournables, que vous retrouverez dans votre vieux livre de classe préparatoire préféré (Ramis-Deschamps-Odoux par exemple).
Les séries entières et les séries de Fourier pourront être utilisées à titre d'exemples mais il n'est pas question de développer leur théorie en détail dans le cadre de cette leçon.

2.1.1 Les différentes notions de convergences

Les notions de *convergence simple* et *convergence uniforme* dérivent immédiatement des notions correspondantes pour les suites de fonctions. On écrira explicitement le critère de Cauchy uniforme pour les séries d'applications. Dans le cas où l'ensemble de départ est un espace métrique (E, d), la notion de *convergence uniforme sut tout compact* dérive elle aussi de la notion équivalente pour les suites de fonctions.

En revanche, les notions de *convergence absolue* et de *convergence normale* (que l'on prendra garde de ne pas confondre !) sont typiques des séries d'applications et n'ont pas de sens pour des suites d'applications. Le fait que la convergence normale entraîne la convergence uniforme est une conséquence immédiate du critère de Cauchy uniforme pour les séries.
Il est bon de faire un tableau des implications entre ces différents types de convergence, comme dans [MONIER cours MP page 317].

▶ On trouvera des contre-exemples utiles dans [GOURDON 226] avec

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ définie par } f_n(x) := \frac{x}{x^2 + n^2}$$

La série $\sum f_n$ converge simplement et uniformément sur tout compact mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$. la série $\sum(-1)^n f_n$ converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais ne converge pas normalement.

▶ le *théorème de Dirichlet* nous fournit des exemples de séries normalement convergentes [DANTZER 391] : Si $f \in C^1_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-périodique, alors sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

▶ Le *critère d'Abel uniforme* est une condition suffisante de convergence uniforme d'une suite de fonctions (voir [DANTZER 291] qui l'énonce dans le cas particulier où E est un intervalle réel mais cela reste vrai pour E ensemble quelconque).
Une application immédiate de ce critère nous donne :
Si (a_n) est une suite réelle décroissante de limite 0, alors la série $\sum a_n e^{int}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi + \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

2.1.2 Continuité et dérivabilité de la somme

▶ Après l'énoncé des théorèmes classiques, on pourra prouver à titre d'exemple que la fonction *zêta* de Riemann est de classe C^∞ en suivant [GOURDON 282] ou [DANTZER 299] :

$$\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R} \text{ définie par } \zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On peut poursuivre l'étude à l'aide d'une comparaison série-intégrale qui donne $\lim_{+\infty} \zeta = 1$ et, en prouvant la cvg normale d'une série d'applications bien choisies, obtenir le développement asymptotique [GOURDON 283] :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \to 1^+$$

► Pour ne pas limiter les exemples au cas où $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est important de parler de l'exponentielle dans une algèbre de Banach. Les théorèmes classiques permettent de prouver les propriétés de continuité et dérivabilité énoncées dans l'exercice 17.6 de [DANTZER 297]. En particulier, les exponentielles de matrices permettent de résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre [DANTZER 346-347].

2.1.3 Intégration de la somme

► Soient $f_n \in C^0([a,b],F), n \in \mathbb{N}$, telles que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$. Alors on a l'égalité :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

Ce résultat classique peut être considéré comme un cas particulier du *théorème d'intégration terme à terme* que nous verrons ci-dessous.
Une application de ce résultat est la *formule de Cauchy* [GOURDON 239] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme. Alors, pour tout $r \in]0,R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'égalité :

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

On en déduit facilement le *théorème de Liouville* [GOURDON 248] :
Si $R = +\infty$ et s'il existe un polynôme P tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |S(z)| \leq P(|z|)$$

alors S est un polynôme (et donc $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ a_n = 0$).

► Le *théorème de convergence monotone* admet le corollaire suivant, dans lequel I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide :

Corollaire 2.1 *Soit $(u_n) \in (C_M(I,\mathbb{R}_+))^{\mathbb{N}}$ une suite d'applications positives intégrables sur I telle que la série $\sum u_n$ converge simplement vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in C_M(I,\mathbb{R}_+)$.*
Alors S est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum \int_I u_n$ converge.
Dans ce cas, on a l'égalité :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Exemple: [MONIER MP exos 378] montre que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \Gamma(x+1)\, \zeta(x+1)$$

► Le *théorème de convergence dominée* implique :

Corollaire 2.2 (Intégration terme à terme) *Soit* $(u_n) \in (C_M(I,\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ *une suite d'applications intégrables sur* I *telle que la série* $\sum u_n$ *converge simplement vers* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in C_M(I,\mathbb{C})$ *et telle que la série* $\sum \int_I |u_n|$ *converge. Alors* S *est intégrable sur* I *et l'on a :*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

On peut déduire de ce corollaire que la transformée de Laplace de la densité gaussienne

$$l : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ définie par } l(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
Or un simple changement de variable montre que l coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction $z \mapsto \exp(z^2/2)$, elle-même développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
Le *principe des zéros isolés* nous permet d'en déduire :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad l(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$$

2.2 Exemples d'étude de fonctions définies par une série

Références :
[MAD] *Leçons d'analyse* par Karine MADÈRE, éd. Ellipses.
[MVT] *Suites et séries de fonctions* par MOISAN, VERNOTTE et TOSEL, éd. Ellipses

Il est déconseillé d'utiliser [MAD 186ss] comme un plan-type mais vous pouvez bien sûr en extraire quelques bonnes idées !
Le titre de la leçon comportant l'expression «étude de fonctions», il est important que vos exemples fassent apparaître différents ingrédients d'une telle étude : tableaux de variations, régularité (continuité, dérivabilité ...), convexité, équivalents, développements asymptotiques etc.

Les deux premiers exemples ci-dessous sont a peu près incontournables.

▶ La fonction *zêta* de Riemann.
La fonction $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est de classe C^∞ et convexe [GOURDON 282] ou [DANTZER 299].
Pour poursuivre l'étude de cette fonction, on utilise une comparaison série-intégrale qui donne $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.
D'autre part, en prouvant la cvg normale d'une série d'applications bien choisies, on obtient le développement asymptotique [GOURDON 283] :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \to 1^+$$

On est alors en mesure de donner l'allure du graphe de ζ [MAD 189] .

▶ Pour ne pas limiter les exemples au cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on mettra à profit la notion d'exponentielle dans une algèbre de Banach. Les théorèmes classiques permettent de prouver les propriétés de continuité et dérivabilité énoncées dans l'exercice 17.6 de [DANTZER 297]. Dans le commentaire oral, on signalera que les exponentielles de matrices permettent de résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre [DANTZER 346-347].

▶ [CMP 340] La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Sa somme S est impaire et vérifie $S(1) = 1$. La série dérivée converge sur tout compact de $\mathbb{R}^*$ donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
Un raisonnement «à la main», utilisant la divergence de la série harmonique, permet de prouver que :

$$\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$$

Enfin, la convergence uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ sur $\mathbb{R}$ permet de montrer que $\lim_{\pm\infty} S = 0$.

▶ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2 x}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on montre facilement $S' < 0$ et $S'' > 0$ si bien que S est strictement décroissante et strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. On prouve «à la main», par une simple minoration, que

$$S(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$$

Enfin, grâce à une majoration par une série géométrique, on forme le développement asymptotique suivant de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$:

$$S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + O(e^{-9x})$$

On peut alors tracer l'allure du graphe de S.

▶ Soit $f \in C_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est non nulle. Par un procédé classique de comparaison entre série et intégrale, [GOURDON 155] prouve la convergence pour tout $t > 0$ de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(nt)$ et met en évidence l'équivalent suivant lorsque $t \to 0^+$:

$$S(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

À l'aide d'un changement de variable et de la valeur de l'intégrale de Gauss, il en déduit en particulier l'équivalent suivant lorsque $x \to 1^-$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$$

▶ [MVT 86] Soit $a \in]-1,1[$ fixé. La série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(a^n x)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de cette série. On démontre que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{nk} \sin\left(a^n x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

Comme toutes ces dérivées sont bornées par $(1-|a|)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$, la série de Taylor en 0 associée à f converge en tout point et f est donc développable en série entière de rayon de convergence infini.
En calculant $f^{(k)}(0)$, nous obtenons finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1-a^{2p+1}} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \tag{1}$$

Nous pouvons retrouver ce résultat en remarquant que l'application f vérifie l'équation fonctionnelle $f(ax) = f(x) - \sin x$. En cherchant les solutions développables en série entière de cette équation, nous retrouvons le membre de gauche de (1). Nous constatons que le rayon de convergence de cette série est infini et, en appelant g sa somme, nous démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{N} \sin(a^n x) + g(a^{n+1}x)$$

Il est alors facile, par continuité de g en 0, d'en déduire $g = f$.

▶ [HAUCHECORNE 160-161] Grâce aux séries d'applications, on peut construire des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivables.
Karl Weierstrass a démontré en 1872 que pour tous $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, la fonction suivante possède cette propriété :

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(a^n x)$$

Bertrand Hauchecorne fait l'étude détaillée d'une autre fonction possédant cette propriété.

▶ [GOU 264-265] Lipot Fejér a construit une fonction 2π-périodique continue dont la série de Fourier est divergente en 0. Il l'a définie sur $[0, \pi]$ comme la somme de la série suivante, qui converge normalement :

$$f(x) := \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin[(2^{p^3} + 1)\,\frac{x}{2}]$$

puis l'a prolongée en une fonction impaire 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

2.3 Exs de développements en SE. Applications.

▶ **Fraction rationnelle dans** $\mathbb{C}$. Toute fonction rationnelle f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière. Le rayon de convergence R de celle-ci est égal au plus petit module des pôles de la fraction rationnelle. La fonction f et la somme de cette série entière coïncident sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon R. [RDO tome 4, 104]

▶ **Théorème de Bernstein sur les SE**. [GOU 250-251]
Soit $a > 0$ et $f \in C^\infty(]-a, a[, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in\,]-a, a[\quad f^{(2k)}(x) \geq 0$$

Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
La méthode consiste à montrer que, dans le développement de Taylor de f

en 0, le reste intégral tend vers 0. On commence par prouver le théorème sur la fonction paire $F(x) := f(x) + f(-x)$ pour faire disparaître les coefficients d'ordre impair dans le développement de Taylor de F.
On retrouve grâce à ce théorème le fait que la fonction tangente est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

▶ **Calcul de la somme d'une série**. En utilisant le *théorème d'Abel* [GOU 252] ou [DAN 309], qui énonce la convergence uniforme sur le rayon $[0, z_0]$ d'une série entière telle que $\sum a_n z_0^n$ converge, DANTZER [311 et 316] prouve les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

▶ **Calcul d'intégrale** (éventuellement dépendant d'un paramètre).
La transformée de Laplace de la densité gaussienne

$$l : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ définie par } l(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
Or un simple changement de variable montre que l coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction $z \mapsto \exp(z^2/2)$, elle-même développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
Le *principe des zéros isolés* nous permet d'en déduire :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad l(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$$

▶ **Résolution d'une équation différentielle linéaire**.[EMP 516-519]
Pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 + x)\, y'' + (3x + 1)\, y' + y = 0\,,$$

on commence par en chercher les solutions développables en série entière dans un voisinage de 0, ce qui nous fournit une première solution (non nulle).
Ensuite, par variation de la constante, on met en évidence une autre solution, linéairement indépendante de la première.
On conclut alors par des questions de «raccords» aux points -1 et 0.

▶ **Combinatoire**. Nombres de Catalan (Problème 6.1 de [CMP]), nombre de dérangements [DAN 324-326].

▶ **Probabilités**. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ [OUV[1] 138ss]
Une application possible est le calcul de la loi d'une somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

On obtient ainsi la *loi binomiale négative* $\mathcal{B}^{-}(n,p)$.[OUV[1] 165-167]

Terminons cette section en attirant l'attention du lecteur sur les difficultés qui peuvent se présenter lorsque l'on considère la série de Taylor associée à une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0.
Soit f une fonction complexe à variable réelle définie sur un voisinage de 0. Si f est développable en série entière, il existe $\alpha > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$ et

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Néanmoins, on peut trouver $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Taylor associée a un rayon de convergence nul [GOU 241]. Une telle application n'est donc pas développable en série entière.
Il existe également $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Taylor associée a un rayon de convergence strictement positif mais la somme de cette série n'est égale à f sur aucun voisinage de 0 [GOU 241].
Le théorème suivant, dit *de réalisation de Borel*, permet de mieux comprendre pourquoi de telles difficultés se présentent [GOU 280].

Théorème 2.3 *Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe quelconque. Il existe une application $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

3 Intégrales et primitives

3.1 Définitions. Construction de l'intégrale.

S'il est rapide de rappeler la définition d'une primitive et son unicité à constante additive près, il est un peu plus long de redonner les étapes essentielles de la construction de l'intégrale.
Il s'agit ici de l'intégale de Riemann pour une application continue par morceaux, à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace de Banach E. On peut se limiter à $E = \mathbb{K}$ pour présenter cette leçon.

3.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Le théorème essentiel faisant le lien entre les notions d'intégrale et primitive est parfois appelé *théorème fondamental de l'analyse* :

Théorème 3.1 *Soit $f : I \to E$ une application continue et $a \in I$. Alors l'application $F : I \to E$ définie par*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est une primitive de f sur I.

Il suffit que l'application f ait un point de discontinuité pour que ce résultat tombe en défaut : on le constate en prenant par exemple $f = \mathbf{1}_{\{a\}}$.

Néanmoins, on dispose de résultats «locaux» : Si l'on suppose seulement que f est continue (resp. continue à droite, continue à gauche) au point $x_0 \in I$, une démonstration similaire à celle du théorème précédent prouve que F est dérivable (resp. dérivable à droite, dérivable à gauche) au point x_0 et que la dérivée $F'(x_0)$ (resp. dérivée à droite $F'_d(x_0)$, dérivée à gauche $F'_g(x_0)$) est égale à $f(x_0)$.

Ainsi, [CMPSI 228-229] énonce que si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et $a \in I$, alors F définie comme ci-dessus est de classe C^1 par morceaux (attention à la définition !) et $F'(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue.

Une application possible aux probabilités est la suivante : Si la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors X admet pour densité F'_X (en posant par exemple $F'(x) = 0$ en tout point x où F_X n'est pas dérivable ; dans un segment quelconque, il n'y a qu'un nombre fini de tels points). En effet, on peut montrer que, pour tous réels $a < b$,

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b F'_X$$

Un corollaire très important du théorème fondamental de l'analyse est le suivant :

Corollaire 3.2 *Toute application continue $f : I \to E$ admet au moins une primitive sur I.*

En choisissant $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$, nous pouvons définir le *logarithme népérien* comme l'unique primitive de f s'annulant au point 1 puis faire l'étude de cette fonction en dressant son tableau de variation.

On pourra encore illustrer le théorème 3.1 en étudiant une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes.
Par exemple [EMPSI 83], $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$$

Le *lemme de Gronwall* [CMPSI 232], utile notamment dans l'étude des équations différentielles ordinaires, est une application du théorème 3.1.

3.3 Calculs pratiques

Grâce au théorème fondamental de l'analyse, nous obtenons la méthode de base permettant de calculer explicitement des intégrales de Riemann :

Proposition 3.3 *Soit $f : I \to E$ une application continue, $[a,b]$ un segment inclus dans I et F une primitive de f sur $[a,b]$. Nous avons alors l'égalité*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

On en déduit deux outils pratiques très souvent utilisés dans le calcul d'une intégrale :

Proposition 3.4 (Intégration par parties) *Soient $f, g \in C^1([a,b], \mathbb{K})$. Alors on a l'égalité :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Proposition 3.5 (Changement de variable) *Soient* $f \in C(I, E)$ *et* $u \in C^1([a, b], I)$. *Alors on a l'égalité :*

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, dx.$$

Bien sûr, on illustrera ce propos par des calculs d'intégrales utilisant les outils précédents.

3.4 Subtilités

En dehors du cadre $f \in C^0(I, E)$, les liens entre intégrale et primitive sont subtils.
Ainsi, si nous reprenons l'exemple $f = \mathbf{1}_{\{a\}}$, nous obtenons une fonction Riemann-intégrable n'admettant aucune primitive puisqu'elle ne satisfait pas la propriété des valeurs intermédiaires (cf. théorème de Darboux [DAN 63]).

Inversement, une application qui n'est pas Riemann-intégrable peut admettre des primitives. Par exemple, définissons $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $F(0) = f(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad ; \quad f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

On vérifie facilement que F est une primitive de f. Cependant, f n'est pas Riemann-intégrable puisqu'elle n'est pas bornée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) = 2(-1)^{n-1}\sqrt{n\pi}$$

Référence : *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques* par Bernard BALAGUER, éd. Ellipses, page 263.

Néanmoins le théorème de convergence dominée permet d'établir :

Proposition 3.6 *Si* $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{K})$ *admet une primitive* F *sur* $[a, b]$, *alors celle-ci est nécessairement de la forme :*

$$\forall x \in [a, b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C \text{ , où } C \text{ est une constante}$$

4 Leçons de synthèse en probabilités

Il s'agit des leçons :

1. Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes
2. Exercices faisant intervenir des variables aléatoires

De façon générale, dans une leçon de synthèse en probabilités, il est souhaitable que la liste d'exemples/exercices que vous choisirez fasse apparaître les notions suivantes, qui sont essentielles :

- probabilité conditionnelle
- indépendance
- variable discrète
- variable aléatoire réelle à densité
- fonction de répartition
- espérance, variance
- au moins un théorème-limite (loi des grands nombres ou théorème de de Moivre-Laplace ou théorème-limite central).

Vous veillerez en particulier à ne pas limiter les exemples au seul cas discret.

Complément bibliographique : Dans la suite, [BRE] désigne l'ouvrage "Introduction aux probabilités" par Pierre Brémaud chez Springer et [PAG] le livre "En passant par hasard" par Gilles Pagès et Claude Bouzitat chez Vuibert : tous deux font partie de la bibliothèque officielle de l'agrégation interne.
L'ouvrage "Calcul des probabilités" par Dominique Foata et Aimé Fuchs chez Dunod, 2ème édition, que nous désignerons par [FOA], ne fait pas partie de la bibliothèque officielle mais décrit plusieurs exemples de situations concrètes.

4.1 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes

Voici une liste d'exemples qui peuvent trouver place dans cette leçon, précédés par les notions qu'ils utilisent.
Équiprobabilité, formule de Poincaré, espérance, variance : Le problème des rencontres [FOA 38-39 et 260-261]
Probabilités conditionnelles : Dépistage d'une maladie rare [COT 11] ou [ESC 197].
Un pari intelligent dans un jeu de cartes [BRE 37]
Probabilités conditionnelles, indépendance : Le théorème de Hardy-Weinberg en génétique [BRE 39-44]
Indépendance : Transmission d'information par bouche à oreille [COT 13]

Lois discrètes : Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale et contrôle de fabrication [REV 10-11].
Loi binomiale, loi de Poisson et gestion de stock [OUV[1] 85-86]
Loi hypergéométrique, maximum de vraisemblance : comment compter les poissons dans un étang ? [FOA 69-70]
Fonction génératrice, indépendance, espérance, variance : Accidents du travail [COT 69-72]
V.a.r. à densité, f.r. , probabilité conditionnelle : Loi exponentielle, absence de mémoire et non-vieillissement [FOA 184-185] ou [COT 91-92]
V.a.r. à densité, loi des grands nombres : Loi exponentielle et datation au carbone 14 [REV 62-63]
Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres : Test statistique pour vérifier si un dé est équilibré [ESC 165]
de Moivre-Laplace : Approximation gaussienne de la loi binomiale et saturation d'un serveur informatique [REV 164-165]
de Moivre-Laplace, TLC : Taille d'échantillon, intervalles de confiance et sondage : exercices 7.3 et 7.4 dans [OUV[1] 237-240]
Équiprobabilité, espérance, TLC : Une application de la formule de Bernstein au tirage avec remise : nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déja tirée [FOA 242 et 273-274]

4.2 Exercices illustrant l'utilisation des probabilités dans des domaines variés des mathématiques

Ce titre a «disparu» du programme officiel mais vous pouvez néanmoins trouver dans la liste suivante des exemples servant d'illustrations dans d'autres leçons de probabilité.
Arithmétique Indicatrice d'Euler [FOA 37-38] $\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier }, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
Nombres normaux [REV 129-130] Tout nombre $x \in [0, 1[$ admet un développement décimal $x = 0, y_1 y_2 \cdots y_n \cdots$, avec $y_i \in [\![0; 9]\!]$. En outre, ce développement est unique à condition d'interdire à la suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de ne prendre que la valeur 9 à partir d'un certain rang.
Le nombre x est dit *normal* si pour tout $k \in [\![0; 9]\!]$, nous avons :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{y_i = k\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{10}$$

Il est souvent très difficile de savoir si un nombre irrationnel donné est normal ; cela reste une question ouverte par exemple pour $\log 2$, $\sqrt{2} - 1$ ou $e - 2$. Néanmoins, Émile Borel a démontré le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1[$, alors presque sûrement X est un nombre normal.
Ce résultat se démontre facilement grâce à la loi forte des grands nombres.
Développement en fraction continue [FOA 270-271] Si $x \in]0,1[$ est un irrationnel, on montre qu'il admet un unique développement en fraction continue infinie :

$$x = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}} \quad ,$$

où $q_1, q_2, q_3 \cdots$ sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et admettant une densité, alors elle est presque sûrement à valeurs irrationnelles et l'on a donc p.s. une égalité similaire avec $Q_1, Q_2, Q_3 \cdots$ variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Gauss a montré que si la densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

alors la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement distribuée, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Q_n \geq k) = \frac{1}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein Preuve probabiliste par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev [OUV[1] 162-164]
Formule de Stirling [FOA 242-243] En appliquant le TLC à une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètres 1, nous obtenons la convergence :

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad ,$$

où X_n suit une loi $\Gamma(n,1)$. On en déduit la formule de Stirling :

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+1/2}$$

Statistique La statistique est un domaine des mathématiques dans lequel on trouvera de très nombreuses applications des probabilités. On veillera à ne pas en abuser mais un exercice de statistique (par exemple la construction d'un intervalle de confiance) sera le bienvenu.
Méthodes de Monte-Carlo [REV 179-181] Elles permettent de calculer une valeur approchée d'une intégrale. Un exemple historique est le problème de l'aiguille de Buffon qui donne une méthode d'approximation du nombre π (mais la vitesse de convergence est médiocre).

5 Autres leçons de calcul des probabilités

5.1 Suite de v.a. indép. de même loi de Bernoulli. V.a. de loi binomiale. Approximations de cette loi

5.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition, espérance, variance de la loi de Bernoulli $B(p)$, resp. de la loi binomiale $B(n,p)$. Expériences typiques modélisées par ces lois (pile ou face, plus généralement comptage du nombre de succès au cours de n répétitions indépendantes d'une expérience).
Il est bien sûr indispensable de faire le lien entre ces deux lois : Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes et de même loi $B(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $B(n,p)$.[ESCOFFIER 78-79] ou [OUVRARD tome 1, 68 et 70]. On en déduit la conséquence suivante :

$$Y_1 \sim B(n_1,p) \text{ et } Y_2 \sim B(n_2,p) \text{indépendantes} \Longrightarrow Y_1 + Y_2 \sim B(n_1+n_2,p)$$

On pourra également parler de la *loi binomiale négative* (ou *loi de Pascal*) et en faire l'étude élémentaire selon [ESC 89-90] ou [FOATA-FUCHS 74-75].

5.1.2 Approximations de la loi binomiale et théorèmes asymptotiques

Approximation par la loi de Poisson Théorème de Poisson. Dans la pratique, on considère que l'approximation $B(n,p) \approx \mathcal{P}(np)$ est utilisable lorsque $n \geq 30$ et $np \leq 5$.[ESCOFFIER 163]
Si l'on veut un résultat précis de vitesse de convergence, on en trouvera un (admis) dans OUVRARD tome 1, bas de page 226.
Sur le plan numérique, l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson est intéressante car elle permet d'éviter des calculs pénibles de coefficients binomiaux. Ceci est illustré par un exercice sur les anniversaires tombant le 1er janvier dans un groupe de n personnes [OUV tome 1, 227].

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et théorèmes de convergence Grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut démontrer plusieurs théorèmes de convergence intéressants. C'est le cas de la *loi faible des grands nombres*, dont un cas particulier correspondant bien au titre de cette leçon est le *théorème de Bernoulli*.[ESC 160-161]
Application : un test permettant de vérifier si un dé à 6 faces est équilibré, avec un risque d'erreur inférieur à 5%. [ESC 165, exercice 8.1]

Avec le même genre de méthodes, l'inégalité de B-T nous permet de démontrer le *théorème de Weierstrass* à l'aide des *polynômes de Bernstein* : c'est un développement possible. [ESC 166] ou [DANTZER 454-455]

Approximation par la loi de Gauss Le *théorème de De Moivre-Laplace* a été démontré par De Moivre en 1733, ouvrant la voie aux importantes généralisations ultérieures fournies par les théorèmes de type *théorème-limite central.* Le théorème de De Moivre-Laplace peut s'écrire sous une forme locale ou globale [OUV 228] ; nous utiliserons souvent la forme globale. Ce théorème nous fournit une approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss. Dans la pratique, on considère que l'approximation $B(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$ est utilisable lorsque $n \geq 30$ et $np(1-p) \geq 9$.[ESC 164]
Si l'on veut énoncer un résultat rigoureux sur la vitesse de convergence dans le théorème de De Moivre-Laplace, on en trouvera un (admis, cas particulier du *théorème de Berry-Esseen*) dans la remarque d'[OUV 229]
Application 1 du théorème de De Moivre-Laplace : Tailles d'échantillons utilisées pour faire un sondage [OUV 237-240, exercices 7.3 et 7.4].
Application 2 : Reprendre l'exercice 8.1 d'[ESC 165] déjà cité en appliquant De Moivre-Laplace au lieu de Bienaymé-Tchebychev (fait dans ESC 168). On constate alors que De Moivre-Laplace donne des résultats d'approximation de la loi binomiale nettement meilleurs que B-T. C'est aussi ce que permet d'observer l'exercice 7.2 d'OUV 237, qui est résolu dans le cadre général du théorème limite-central mais s'applique très bien au cas particulier de De Moivre-Laplace.
La notion sous-jacente à ces exercices est celle d'intervalle de confiance. Le théorème de De Moivre-Laplace permet de construire des intervalles de confiance plus précis que ceux obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.