Université Pierre et Marie Curie | **Année 2011-2012**
L3 - Mathématiques | Second semestre
Probabilités - LM390 | Groupe 1

Feuille de TD n°2

Exercice 1
Soit T une v.a. entière définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que T n'est pas égale à $+\infty$ presque sûrement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n + p \,|\, T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 2
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$ indépendantes.

1. Soit $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$, $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.
2. Soit $\nu(\omega) = \inf \{n \geq 2 : \omega \in A_n\}$, avec $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que ν est une v.a. Quelle est la loi de ν ? Montrer que $P(\nu = +\infty) = 0$.

Exercice 3
On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, deux variables de Bernoulli ε_1 et ε_2, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$; elles satisfont donc

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2, \quad i = 1,\ 2.$$

1. Montrer que les seules fonctions $f : \{-1, +1\}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit indépendante d'une part de ε_1, et d'autre part de ε_2 sont données par
$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = a\mathbb{1}_{\{\varepsilon_1 = \varepsilon_2\}} + b\mathbb{1}_{\{\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\}}, \tag{1}$$
avec $a\,, b \in \mathbb{R}$, ou de façon équivalente par
$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \beta |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\,,$$
avec $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs du couple (a, b) une variable $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ donnée par (1) est-elle indépendante du couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$?

Exercice 4
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p\,, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p\,, \quad \text{avec } 0 < p < 1\,.$$

On pose

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n X_{n+1} \\ S_n &= X_1 + \cdots + X_n \\ V_n &= Y_1 + \cdots + Y_n\,. \end{aligned}$$

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$, $\mathbb{E}[V_n]$.
2. Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$, $\mathrm{Var}(V_n)$ et $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

Exercice 5
On considère n variables indépendantes $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, r\}$ et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = i) = p_i$, $1 \leq i \leq r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_j = i\}}$.

1. Déterminer la loi de Z_1. A quelle condition les v.a. Z_i ont-elles même loi ?
2. Calculer la covariance de Z_1 et Z_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 6
Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, (*i.e.* $\mathbb{P}(X_i = k) = 1/N$ pour $k = 1, 2, \dots, N$). On désigne par U_n leur minimum et par V_n leur maximum.

1. Calculer la loi de V_n.
2. Calculer la loi jointe de U_n et V_n puis $\mathbb{P}(U_n = V_n)$.
3. Calculer la probabilité pour que $X_1 = j$ et $X_2 = k$ sachant que $U_n = r$.
4. Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $\mathbb{E}[V_n]$ et $\mathrm{Var}(V_n)$.

Exercice 7
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi. On suppose que les X_n, $n \geq 1$, prennent des valeurs strictement positives. On pose $\mathbb{E}[X_k] = a$, $\mathbb{E}[X_k^{-1}] = b$, ($a < +\infty$ et $b < +\infty$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}[S_n^{-1}]$ est fini et que $\mathbb{E}[X_k S_n^{-1}] = n^{-1}$, pour $k = 1, \cdots, n$. Calculer $\mathbb{E}[S_m S_n^{-1}]$, $n, m \geq 1$.

Exercice 8
Soient X et Y deux v.a. indépendantes. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$, et Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$. Soit Z la v.a. égale à 0 si $X = 0$ et à Y si $X = 1$.

1. Calculer la loi de Z.
2. Quelle est la fonction génératrice de Z, son espérance et sa variance ?
3. Que vaut la probabilité conditionnelle de $X = 0$, respectivement, $X = 1$, sachant que $Z = 0$?

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On note $\mathcal{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p (pour $n = 0$ c'est la loi de la v.a. identiquement nulle). Soit un entier $M \geq 1$, un réel $a \in]0, 1[$ et U, V des v.a. à valeurs dans $\{0, 1, \dots, M\}$ telles que

- La loi de U sachant $V = r$ est identique à celle de $r + W$ où W suit une loi $\mathcal{B}(M - r, p)$.
- V suit une loi $\mathcal{B}(M, a)$

Prouver, en utilisant les fonctions génératrices puis par un calcul direct, que U suit une loi $\mathcal{B}(M, 1 - bq)$, avec $b = 1 - a$ et $q = 1 - p$.

Exercice 10
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et ν une v.a. à valeurs entières indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. On définit S_ν sur Ω par $S_\nu(\omega) = 0$ si $\nu(\omega) = 0$ et $S_\nu(\omega) = \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} X_n(\omega)$ si $\nu(\omega) \geq 1$.

1. Montrer que S_ν est une v.a.

2. On suppose que les X_n sont à valeurs entières et ont même loi. Déterminer la fonction génératrice de S_ν en fonction de celle de ν et de X_1.
3. En déduire l'espérance et la variance de S_ν.
4. Trouver la loi de S_ν lorsque les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et que ν suit une loi géométrique de paramètre $a \in]0,1[$.

Exercice 11
Soit Φ une fonction borélienne, strictement positive définie sur $]0,+\infty[$ et croissante. On suppose que $\mathbb{E}[\Phi(|X|)] = M < +\infty$, où X est une variable aléatoire réelle presque sûrement non nulle. Montrer que

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{M}{\Phi(t)}\,.$$

Exercice 12
Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2\,.$$

1. Calculer en fonction de n la quantité
$$\mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2]\,.$$
2. Soit $a \in]0,1[$, fixé. Montrer l'inégalité
$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \frac{1}{a^2 n}\,. \tag{2}$$
3. Montrer que pour $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} C_n^l \mathbb{1}_{|2l-n| \geq an}.$$
4. Déduire de 2. et de 3. que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l \mathbb{1}_{\{|2l-n|\geq an\}}\right) = 0\,.$$
5. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Calculer
$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_n\right)^2\right]$$
en fonction de θ.

Exercice 13
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(Z_n = -1) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 2p$ où p est tel que $0 < p < 1/2$.

1. On définit pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = Z_n + Z_{n+1}$.
   (a) Déterminer la loi de U_n. Pour quels couples (n, m) les variables aléatoires U_n et U_m sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer pour $n \geq 2$, $\mathrm{Var}(Z_1 + 2\sum_{k=2}^{n} Z_k + Z_{n+1})$.

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} U_k\right| > \varepsilon\right) = 0\,.$$

2. Déterminer pour tout $n \geq 1$ la loi de X_n où $X_n = |Z_n|$. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes ?

3. On définit pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

   (a) Déterminer la loi de S_n.

   (b) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $\{S_k = i\}$, $(k \neq n)$. On distinguera deux cas suivant que $n > k$ ou $n < k$.