Université Pierre et Marie Curie **Année 2011-2012**

Probabilités - LM390

Interrogation écrite N°1

06 mars 2012. Durée 2h

Question de cours

Rappeler l'inégalité de Markov.

Exercice

On considère une urne contenant k boules rouges et $n-k$ boules vertes. On tire les boules une par une sans remise jusqu'à épuisement. Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la i-ème boule tirée est rouge et 0 si la i-ème boule tirée est verte.

1) Donner la loi de X_i.

2) On note $T := \min\{i \geq 1 \, : \, X_i = 1\}$ le rang du premier tirage d'une boule rouge. Donner la loi de T.

Problème

Les parties I, II et III sont essentiellement indépendantes.

<u>*Partie I*</u>

Soit un entier $n \geq 1$ et un réel $p \in]0, 1[$. On appelle *loi binômiale négative de paramètres n et p* la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ donnée pour $k \geq 0$ par

$$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n (1-p)^k.$$

Dans les questions 1) et 2), on utilisera l'égalité suivante: pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $r \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!} r^k = \frac{(n-1)!}{(1-r)^n} \tag{1}$$

1) Vérifier que les probabilités $(p_k, \, k \geq 0)$ définissent bien une mesure de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire de loi binômiale négative de paramètres n et p. Déterminer la fonction génératrice de X, notée $G_X(s)$. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

3) Soit un entier $m \geq 1$ et Y une variable aléatoire de loi binômiale négative de paramètres m et p, indépendante de X. Donner la fonction génératrice de $X+Y$. En déduire que $X+Y$ suit une loi binômiale négative dont on précisera les paramètres.

Partie II

Soit une suite $(\varepsilon_i,\ i \geq 1)$ de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p \in]0,1[$. On définit

- $T_1 := \min\{i \geq 1\ :\ \varepsilon_i = 1\}$,
- $T_2 := \min\{i \geq T_1 + 1\ :\ \varepsilon_i = 1\}$.

T_1 et T_2 représentent respectivement le temps d'apparition du 1er et du 2e "1" dans la suite $(\varepsilon_i,\ i \geq 1)$.

4) Donner la loi de T_1. Vérifier que $T_1 < \infty$ presque sûrement. Calculer $\mathbb{E}[T_1]$ et $\text{Var}[T_1]$.

5) Déterminer la loi du couple $(T_1, T_2 - T_1)$. Montrer que T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendantes et de même loi.

6) En déduire la loi de T_2. Vérifier que $T_2 - 2$ suit une loi binômiale négative de paramètres 2 et p.

7) On définit de même T_n comme le temps d'apparition du n-ième "1" dans la suite $(\varepsilon_i,\ i \geq 1)$. Déterminer par un calcul direct la probabilité $\mathbb{P}(T_n = k)$. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, la variable $T_n - n$ suit une loi binômiale négative de paramètres n et p.

Partie III

Soit $p \in]0,1[$ un réel. On considère une suite $(X_i,\ i \geq 1)$ de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1-p$, et on note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout entier $n \geq 1$.

8) Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\text{Var}[S_n]$.

9) Montrer que pour tout réel $d > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n(1-p)}{p}\right| \geq dn\right) \leq \frac{1-p}{p^2 d^2}\frac{1}{n}.$$

10) Calculer la fonction génératrice de la variable S_n. En comparant avec $G_X(s)$ obtenue à la question 2), vérifier que S_n suit une loi binômiale négative de paramètres n et p.

Question bonus. Soit N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $a \in]0,1[$, indépendante de la suite $(X_i, i \geq 1)$. On définit la variable aléatoire S_N par

- $S_N = 0$ si $N = 0$,
- $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ si $N \geq 1$.

Calculer la fonction génératrice de la variable S_N. Démontrer que S_N a la loi de YZ où Y suit une loi de Bernoulli et Z suit une loi géométrique dont on donnera les paramètres.