Université Pierre et Marie Curie | **Année 2011–2012**
Licence - Mathématiques - LM346 | Processus et simulations

Série d'exercices N°1
Simulation de variables aléatoires

1. Rappels sur les densités et les fonctions de répartition. Soit X une v.a. réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$, de fonction de répartition F. Quelle est la classe de F ? Donner les densités et fonctions de répartition de X^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et de $X - E(X)$, où E désigne la partie entière.

2. Rappels sur sur la loi jointe d'un couple de v.a. 1. Donner un exemple de réalisation, utilisant deux dé à six faces, d'un couple de v.a. X, Y è valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$ de loi uniforme et indépendantes. Donner ensuite un exemple de réalisation d'un couple de v.a. X', Y' à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$ de loi uniforme mais non indépendantes.

2. Soit X, Y un couple de v.a. indépendantes telles que X (resp. Y) suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ (resp. une loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de densité $\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}^+$). On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Intuitivement, ces v.a. semblent-elles indépendantes (considérer $U + V$) ?

a) Donner la densité jointe de (U, V).

b) Donner la densité de U et celle de V. Ces v.a. sont-elles indépendantes ?

3. Exercice de cours 1 : la méthode d'inversion. 1. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\}\,.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ la v.a. $F^{-1}(U)$ a même loi que X.
2. On suppose de plus que F est continue. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

4. Exercice de cours 2 : la méthode du rejet. Soit X une v.a. dont la densité f est continue et à support compact inclus dans l'intervalle $[a, b]$. Soit k un réel tel que $k \geq \sup_x f(x)$. On considère une v.a. $P = (U, V)$ uniformément distribuée dans le rectangle $[a, b] \times [0, k]$. On désigne par A la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f.

On cherche à simuler la loi de X. Pour ceci, on effectue des tirages successifs $P_1 = (U_1, V_1), \dots, P_n = (U_n, V_n), \dots$ selon la loi de P et l'on définit la v.a. X de la manière suivante : si le point $P_i = (U_i, V_i)$ se trouve dans A, alors on pose $Y = U_i$, sinon on tire à nouveau selon la loi de P et indépendamment des tirages précédants.
1. Soit N le nombre de tirages nécessaires pour atteindre A. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$P(N = n) = \frac{\text{aire}(A)}{k(b-a)} \left(\frac{k(b-a) - \text{aire}(A)}{k(b-a)} \right)^{n-1} .$$

En déduire que par ce procédé, on atteint l'ensemble A au bout un nombre de tirages presque sûrement fini.
2. Soit Y définie ainsi :

$$\begin{array}{rcll} Y & = & U_1 & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \in A\} \\ Y & = & U_2 & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A,\, P_2 \in A\} \\ & & \dots & \\ Y & = & U_n & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A,\, \dots, P_{n-1} \notin A,\, P_n \in A\} \\ & & \dots & \end{array}$$

Vérifier que ceci définit bien une v.a..
3. Montrer que Y a même loi que X.

4A. Simulation de v.a. indépendantes de loi uniforme sur une boule de rayon unité et sur une sphère de rayon unité dans $\mathbf{R^d}$. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi de $2U-1$.

Soient $U_1,\dots,U_d$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi du vecteur $\vec{V}=(2U_1-1,\dots,2U_d-1)$.

Soit $U_1,U_2,\dots$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose les vecteurs $V_k=(2U_{(k-1)d+1}-1,\dots,2U_{kd}-1)$ pour $k=1,2,\dots$.

Soit $B(0,1)=\{\vec{x}\in\mathbf{R^d}:\|x\|\le 1\}$. On pose $\nu=\min\{k>0:\vec{V}_k\in B(0,1)\}$. Donner la loi du vecteur aléatoire V_ν.

Donner le temps moyen de simulation d'une v.a. de loi uniforme sur $B(0,1)$.

Comment simuler une suite de vecteurs aléaoires indépendants de loi uniforme sur $B(0,1)$?

Comment simuler une suite de vecteurs aléatoires indépendants de loi uniforme sur $S(0,1)=\{\vec{x}\in\mathbf{R^d}:\|x\|=1\}$?

5. Simulation de la loi de Cauchy par la méthode d'inversion. On appelle loi de Cauchy la loi de densité

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

sur $\mathbb{R}$. On considère une v.a. U de loi uniforme sur $]0,1[$. Donner une fonction f telle que $f(U)$ a une loi uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$, puis une fonction g (donné de façon explicite) telle que $g(U)$ suit la loi de Cauchy. Donner, pour V v.a. de loi uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$, la loi de $\tan(V)$.

6. Simulation de la loi de Cauchy à partir de deux v.a. de loi gaussienne indépendantes. Soit X,Y deux v.a. indépendantes de loi gaussienne centrées de variance 1. Montrer que la v.a. $Z=X/Y$ est définie presque sûrement et donner sa loi.

7. Simulation de v.a. discrètes. Soit X une v.a. de loi discrète $p_0\delta_0+p_1\delta_1+\cdots+p_n\delta_n$, où $(p_i)_{1\le i\le n}$ est une probabilité sur l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$. On veut simuler X à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la v.a.

$$Y=x_0\mathbb{1}_{\{U<p_0\}}+x_1\mathbb{1}_{\{p_0\le U<p_0+p_1\}}+\cdots+x_n\mathbb{1}_{\{p_0+\cdots+p_{n-1}\le U\le 1\}}$$

a même loi que X.

8. Simulation d'une v.a. de loi continue. Soit $a,b>0$ et F la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée par la formule $F(x)=1-\exp(-ax^b)$. Soit X une v.a. de fonction de répartition F. Donner sa densité f et proposer une méthode simulation de X.

9. Simulation de v.a. de loi géomètrique. On rappelle que pour tout $p\in]0,1[$, la loi géométrique de paramètre p est la loi

$$\sum_{k\ge 1}p(1-p)^{k-1}\delta_k.$$

Proposer deux méthodes de simulation de cette loi, l'une à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0,1]$, l'autre à partir d'une suite $(X_i)_{i\ge1}$ de v.a. indépendantes de loi $p\delta_1+(1-p)\delta_0$.

10. Simulation de v.a. de loi binomiale à partir de variables aléatoires uniformes indépendantes. Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres N et p : $P(X=n)=C_N^n p^n(1-p)^{N-n}$, $n=0,1,\dots,N$. On veut simuler la loi de X à partir de N v.a. indépendantes $U_1,\dots,U_N$ de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la v.a. Y égale au nombre de U_i qui sont inférieurs à p suit la même loi que X.

11. Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, montrer que l'on peut simuler la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ en posant $X = -1/(\lambda \log U)$.

12. Simulation de v.a. de loi de Poisson à partir de variables aléatoires de loi exponentielle indépendantes. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la v.a.

$$Y = \mathbb{1}_{\{X_1 \leq 1 < X_1+X_2\}} + 2\mathbb{1}_{\{X_1+X_2 \leq 1 < X_1+X_2+X_3\}} + \cdots + n\mathbb{1}_{\{X_1+\cdots+X_n \leq 1 < X_1+\cdots+X_{n+1}\}} + \cdots$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ : $P(Y=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n \geq 0$.

13. Simulation de deux v.a. gaussiennes indépendantes à partir de deux variables aléatoires de loi uniforme indépendantes. Soit T une v.a. exponentielle d'espérance 1, et Θ une v.a. uniformément distribuée à valeurs dans $[0, 2\pi[$. On suppose T et Θ indépendantes. On définit :

$$X = \sqrt{2T}\cos(\Theta) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2T}\sin(\Theta)\,.$$

1. Définissons les ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ par $U = \mathbb{R}^{+*} \times]0, 2\pi[$ et $V = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. En considérant l'application $f : U \to V$ définie par

$$f(t,\theta) = (\sqrt{2t}\cos\theta, \sqrt{2t}\sin\theta),$$

montrer que pour toute fonction mesurable positive g sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int_{t=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} g(\sqrt{2t}\cos\theta, \sqrt{2t}\sin\theta)d\theta dt = \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy.$$

2. Montrer que X et Y ont même loi et sont indépendantes. Quelle est cette loi commune ?

3. Soient U_1 et U_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur [0,1]. Quelle est la loi du couple de v.a.

$$((-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2), (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2))\,?$$