Correction TP3 : Méthode de Monte Carlo

Exercice 1. Approximation de π par la méthode de Monte Carlo

1. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1^2+U_2^2 \le 1) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{\{u_1^2+u_2^2\le 1\}} du_1 du_2 \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2. Notons
$$X := \mathbf{1}_{\{U_1^2+U_2^2\le 1\}} \quad ; \quad \mathbf{E}(X) = \frac{\pi}{4}$$
Considérons une suite $(X_k)_k$ de variables i.i.d. selon la loi de X , notons
$$\bar{X}_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$
Alors par la loi forte des grands nombres, on a
$$\lim_{N\to\infty} \bar{X}_N = \mathbb{E}(X) \quad \text{convergence p.s.}$$
et le théorème de la limite centrale permet d'avoir l'approximation suivante en loi :
$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X}\big(\bar{X}_N - E(X)\big) \approx \mathcal{N}(0,1)$$
ainsi pour tout $a > 0$, on a
$$\mathbb{P}(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X}\big(\bar{X}_N - E(X)\big) \in [-a,a]) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$
D'autre part,
$$|X| \le 1 \quad ; \quad \sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
donc
$$|\sigma_X| \le 1$$
[1] On a
$$\{\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X}\big(\bar{X}_N - E(X)\big) \in [-a,a]\} \subset \{\sqrt{N}\big(\bar{X}_N - E(X)\big) \in [-a,a]\}$$
précisement,
$$\mathbb{P}(\bar{X}_N - \frac{a}{\sqrt{N}} \le E(X) \le \bar{X}_N + \frac{a}{\sqrt{N}}) \ge \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

1. En fait, $X^2 = X$ donc σ_X^2 la variance de X s'écrit explicitement en fonction de la quantité que l'on veut estimer.
$$\sigma_X^2 := \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4})^2$$
Bien sur, on suppose que l'on ne connait pas π.

```
clear
function [p_min,p,p_max] = approx_pi(a,N)

//realisation d'un N-?chantillon de la variable X
u1=-1 + 2*rand(1,N);
u2=-1 + 2*rand(1,N);

z= u1.^2 + u2.^2;
x=ones(1,N);
for i=1:N,
if (z(i)>1) then x(i)=0; end
end

//estimation de pi
ps4= sum(x)/N;
//
p_min= 4.0*(ps4 - a/sqrt(N));
p_max= 4.0*(ps4 + a/sqrt(N));
p=4.0*ps4;
endfunction

N=100000;
[pmin,p,pmax]=approx_pi(1.96,N);
```

3.
```
Pmin=zeros(1,5);
P=zeros(1,5);
Pmax=zeros(1,5);

for i=1:5,
  [Pmin(i),P(i),Pmax(i)] = approx_pi(1.96,exp(i*log(10)));
end
xbasc
plot2d([1:5],Pmin,style=3);
plot2d([1:5],P,style=4);
plot2d([1:5],Pmax,style=5);
```

Exercice 2. On cherche à estimer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$$

1. On peut estimer $I(a)$ à partir d'un échantillon de loi uniforme.

   (a)
   $$\int_0^a e^{-x^2} dx = a \int_0^1 e^{-(ay)^2} dy$$
   donc
   $$I(a) = \mathbb{E}(ae^{-(aU)^2})$$

   (b)
```
function [Imin,I,Imax] = approx_I1(a,N)

//realisation d'un N-\'echantillon de la variable X
u=rand(1,N)
x=a*exp(-a*a*u^2)
//estimation de I
I= sum(x)/N;

//estimation de la variance
sx=x-ones(1,N)*I;
sx=sx.^2;
sx = sqrt(sum(sx)/(N-1));

Imin= (I - 1.96*sx/sqrt(N));
```

```
Imax= (I + 1.96*sx/sqrt(N));

endfunction
```

(c)
```
I1min=zeros(1,5);
I1=zeros(1,5);
I1max=zeros(1,5);

for i=1:5,
  [I1min(i),I1(i),I2max(i)] = approx_I1(2.0,exp(i*log(10)));
end
xbasc
plot2d([1:5],I1min,style=3);
plot2d([1:5],I1,style=4);
plot2d([1:5],I1max,style=5);
```

2. On peut également estimer $I(a)$ à partir d'un échantillon de loi gaussienne.

(a)
$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,\sqrt{2}a]}(y)e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$
donc
$$I(a) = \sqrt{\pi}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{[0,\sqrt{2}a]}(X))$$

(b)
```
clear

function [Imin,I,Imax] = approx_I2(a,N)

//realisation d'un N-?chantillon de la variable X
z=sqrt(-2*log(rand(1,N))).*cos(2.0*%pi*rand(1,N));
x=zeros(1,N);

for i=1:N,
  if (0<z(i)& z(i)<sqrt(2.0)*a) then x(i)=sqrt(%pi); end

end
//estimation de I
I= sum(x)/N;

//estimation de la variance
sx=x-ones(1,N)*I;
sx=sx.^2;
sx = sqrt(sum(sx)/(N-1));

Imin= (I - 1.96*sx/sqrt(N));
Imax= (I + 1.96*sx/sqrt(N));

endfunction
```

(c)
```
I2min=zeros(1,5);
I2=zeros(1,5);
I2max=zeros(1,5);

for i=1:5,
  [I2min(i),I2(i),I2max(i)] = approx_I2(2.0,exp(i*log(10)));
end
xbasc
plot2d([1:5],I2min,style=3);
plot2d([1:5],I2,style=4);
plot2d([1:5],I2max,style=5);
```

3.
```
xbasc;
plot2d([1:5],I1max-I1min,style=1);
plot2d([1:5],I2max-I2min,style=5);
```

Exercice 3. 1.

$$f \geq 0 \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}.$$

3.
```
//Programation de la function f
function y=f(x)
  if x<=0 then y=0;
  elseif x<=1 then y=(2/3)*x;
  elseif x<=2 then y=2/3;
  else y=0;
  end
endfunction

//simulation de la v.a. X
function X=vaX(N)
  c=2/3;
  i=1
  X=zeros(N,1);
  while i<=N
    Y=2*rand();
    Z=c*rand()/2;
    if Z<f(Y) then X(i,1)=Y;i=i+1;end
  end
endfunction
```

4.
```
//Estimation de E(exp(X^2))
function y=EexpX2(N)
  X=vaX(N);
  y=sum(exp(X^2))/N;
endfunction
```

Exercice 4. 1. Soit $f(x) = x^2/(1+x^3)$. Donc si X suit la loi de Pareto de paramètre 1 (c'est à dire de densité $\varphi(x) = x^{-2}1_{\{x\geq 1\}}$), $J = \mathbf{E}(f(X))$.

2. Si U suit la loi uniforme $[0,1]$ donc $1/(1-U)$ suit la loi de Pareto de paramètre 1 (Méthode d'inversion de la fonction de répartition.)

```
funcprot(0)

//realisation d'un N-echantillon de la variable X
function X=Pareto(N)
  X=zeros(N);
  for k=1:N
    X(k)=1/(1-rand());
  end
endfunction

//Programation de la function f(x)
function y=f(x)
  N=length(x);
  y=zeros(N,1);
  for k=1:N
    y(k)=x(k)^2/(1+x(k)^3);
  end

endfunction

//Estimation de J avec son intervale de confiance.
function [Jmin,J,Jmax]=approx_J(N)
```

```
  X=Pareto(N);

  //estimation de J

  J=sum(f(X))/N;

  //estimation de la variance
  V=sum((f(X))^2)/N-J^2;
  s=sqrt(V);


  Jmin=J-1.96*s/sqrt(N);
  Jmax=J+1.96*s/sqrt(N);

endfunction
```

3. Après faire le changement de variable $y = 1/x$ on a : $J = \int_0^1 y/(1+y^3)dy$, donc $J = \mathbb{E}(g(U))$ où U suit la loi uniforme $[0,1]$ et $g(x) = x/(1+x^3)$.

```
function [Jmin,J,Jmax]=approx_J2(N)
  //realisation de la variable Y=g(U)
  Y=zeros(N,1);
  for k=1:N
    u=rand();
    Y(k)=u/(1+u^3);
  end

  J=sum(Y)/N;

  //estimation de la variance
  V=sum(Y^2)/N-J^2;
  s=sqrt(V);
   Jmin=J-1.96*s/sqrt(N);
  Jmax=J+1.96*s/sqrt(N);

endfunction
```