Université Pierre et Marie Curie — **Année 2011–2012**

Licence - Mathématiques - LM346 — Processus et simulations

Corrigé de la série d'exercices N° 3.

Exercice 0: On note par D un événement qu'un réveil a un défaut, par A qu'il provient de l'usine A et par B qu'il provient de l'usine B. Par la formule de probabilité totale : $P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)(1 - P(A))$.Alors, $0,17 = 0,2P(A) + 0,1(1 - P(A))$. Finalement : $0,07 = 0,1P(A)$, $P(A) = 0,7$. La réponse 70%.

Par la formule de Bayes : $P(B \mid D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{P(D|B)(1-P(A))}{P(D)} = \frac{0,1(1-0,7)}{0,17} = 3/17$.

Exercice 1.

$p_X(x) = \int p(x,y)dy = C\int_0^\infty (1+x+y)^{-5}dy = (C/4)(1+x)^{-4}$. $p_{Y|X=x}(x,y) = p(x,y)/p(x) = 4(1+x)^4(1+x+y)^{-5}$. $E(Y \mid X = x) = \int_0^\infty y4(1+x)^4(1+x+y)^{-5}dy = 4(1+x)^4(\int_0^\infty (1+x+y)^{-4}dy - (1+x)\int_0^\infty (1+x+y)^{-5}dy) = (1/3)(1+x)$, donc $E(Y \mid X) = (1/3)(1+X)$.

Exercice 2.

L' exercice 2 est corrigé dans le poly du cours.

Exercice 3.

La loi donnant le numéro du casino visité au $n+1$-ème jour, étant donnée la liste de tous les casinos visités jusqu'au n-ème jour ne dépend que de celui visité au n-ème jour. $(X_n)_{n\geq 0}$ est donc une chaîne de Markov homogène (les probabilités de transitions ne dépendent pas de n) sur un espace à 3 états. Le coefficient $Q_{i,j}$ de la matrice de transition est égal à la probabilité d'aller de i à j :

$$Q_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Dans notre cas, la matrice de transition vaut donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous laissons le lecteur calculer les puissances de la matrice Q à la main Q^2, Q^3 (dont nous noterons les éléments $Q^{(2)}_{i,j}$, $Q^{(3)}_{i,j}$, respectivement, $i,j = 1,2,3$), ainsi que le vecteur μQ, μ étant le vecteur ligne $(1/4, 1/4, 1/2)$. Alors $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 3) = Q_{3,1}$, $P(X_3 = 3 \mid X_1 = 2) = Q^{(2)}_{2,3}$, $P(X_8 = 3 \mid X_5 = 2) = Q^{(3)}_{2,3}$.

$P(X_1 = 1, X_4 = 3, X_5 = 2, X_7 = 1) = (\mu Q)_1 Q^{(3)}_{1,3} Q_{3,2} Q^{(2)}_{2,1}$

Exercice 4.

La loi de la position de la souris à l'instant $n+1$, étant donné toute l'histoire, ne dépend que de sa position à l'instant n. La suite des pièces visitées (X_n) par la souris est donc une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition Q est :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(X_0 = 1, X_2 = 3, X_5 = 2, X_7 = 1) = (1/6)Q_{1,3}Q^{(3)}_{3,2}Q^{(2)}_{2,1}$, $P(X_{k+n} = 3 \mid X_k = 1) = Q^{(n)}_{1,3}$.

La matrice Q est triangulaire, donc ses valeurs propres sont sur la diagonale : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Comme elles sont toutes distinctes, la matrice Q est diagonalisable. On voit directement que le premier vecteur de base est vecteur propre pour la valeur propre $\frac{1}{3}$. D'autre part, comme la matrice Q est stochastique, les coefficients sur chaque ligne somment à 1, donc le vecteur contenant que des 1 est vecteur propre pour la valeur propre 1. Après calcul, on trouve que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$. Donc, on a $Q = R\Lambda R^{-1}$, avec

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de R peut être facilement calculée par le pivot de Gauss :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
Nous notons $p_{i,j}^{(n)}$ les éléments de la matrice P^n qui est la puissance $n$ème de la matrice P.

Si $p = 1/16$, les valeurs propres de cette matrice sont 1, $-1/12$ et $-1/4$. Donc $P = U\Lambda U^{-1}$ avec Λ la matrice diagonale avec 1, $-1/12$ et $-1/4$ sur la diagonale et U une matrice inversible. Alors $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$. On pourrait rechercher U à partir des vecteurs propres. Mais voici une autre méthode. On a forcément

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + \beta(-1/12)^n + \gamma(-1/4)^n$$

avec certains coefficients α, β, γ inconnus. On sait que $p_{1,1}^{(1)} = 0$, et par le calcul de P^2 on obtient que $p_{1,1}^{(2)} = 0$. On a aussi $P^0 = Id$, donc $p_{1,1}^{(0)} = 1$.

Alors, le lecteur trouvera aisèment α, β, γ à partir des égalités $p_{11}^{(0)} = 1 = \alpha + \beta + \gamma$, $p_{11}^{(1)} = 0 = \alpha - \beta/12 - \gamma/4$, $p_{11}^{(2)} = 0 = \alpha + \beta/144 + \gamma/16$.

Si $p = 1/6$, les valeurs propres sont 1, $-\sqrt{2}/6(cos\pi/4 \pm i \sin \pi/4)$. Donc

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + (-\sqrt{2}/6)^n(\beta \cos(n\pi/4) + \gamma \sin(n\pi/4))$$

où on calculera α, β, γ à partir des conditions $p_{11}^{(0)} = 1$, $p_{11}^{(1)} = 0$, $p_{11}^{(2)} = 0$.

Dans le cas $p = 1/12$, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1/6$. Alors $P = U\Lambda U^{-1}$ et $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$ où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^n \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Alors $p_{11}^{(n)} = \alpha + (-1/6)^n(\beta + n\gamma)$ où on recherchera α, β, γ comme dans les cas précédents.

Exercice 6.
A. Lorsque $p = q = 0$, la chaîne reste indéfininiment dans son état initial. Lorsque $p = q = 1$, la chaîne change d'état à chaque instant de manière là encore déterministe.

Remarquons que M s'écrit $I + R$, où I est la matrice identité de taille 2 et

$$R = \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1. Comme I et R commutent, on peut calculer la puissance n-ème de M par le binôme de Newton, en remarquant que

$$R^2 = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = -(p+q)R.$$

On a en effet :

$$M^n = (I+R)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^k = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-(p+q))^k \right) R = I - \frac{(1-(p+q))^n - 1}{p+q} R.$$

B On considère la chaîne à N états $1, \dots, N$ telle que X_n représente la forme du virus à l'instant n. Elle est markovienne de transitions $P_{ii} = 1-\alpha$ et $P_{ij} = \frac{\alpha}{N-1}$ si $j \neq i$.

Si maintenant i est un état particulier (celui dont la CM est parti, par exemple), on pose $Y_n = 1$ si $X_n = i$ et $Y_n = 0$ sinon. Alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une CM sur deux états $\{0,1\}$ de transition $q_{11} = 1-\alpha$, $q_{10} = \alpha$, $q_{01} = \alpha/(N-1)$ et $q_{00} = 1-\alpha/(N-1)$. En effet, $P(Y_n = 1 \mid Y_0 = i_0, \dots, Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = 0)$ est le probabilité que le virus se retouve à l'instant n dans l'état i si à 'instant $n-1$ il est dans un des $N-1$ états différents de i, ce qui est toujours $\alpha/(N-1)$. Cette probabilité ne dépend pas de $i_0, \dots, i_{n-1}$. Le raisonnement est le même dans des 3 autres cas.

La probabilité cherchée est $M_{1,1}^{(n)}$. En utilisant le résultat de la partie A on trouve qu'elle vaut $1/N + (1-1/N)(1-\alpha N/(N-1))^n$.

Exercice 7.

La façon la plus simple de voir les classes d'états qui communiquent est de dessiner un diagramme d'une Chaine de Markov. C'est un graph orienté: on dessine d'abord des sommets qui corréspondent aux états, on dessine une flèche du sommet de l'état i au sommet de l'état j ssi $p_{i,j} > 0$.

Maintenant i conduit à j, s'il existe "un chemin orienté de flèches" partant de i et aboutissant à j. Les états i et j communiquent si i conduit à j et aussi j conduit à i.

A. L'ex 3 : l'état 1 mène à 2 qui mène à 1, aussi 1 mène à 3 qui mène à 1, donc 1,2,3 sont dans la même classe. la CM de l'exercice 3 est irréductible (une seule classe, donc forcément fermée).

L'ex 4 : L'etat 1 mène à 2 mais 2 ne mène pas à 1 (car 2 conduit uniquement à 3 et 3 est absorbant), 1 mène à 3 mais 3 ne mène pas à 1, donc $\{1\}$ est une classe NON fermée. Aussi 2 mène à 3 mais 3 ne mène pas à 2, donc $\{2\}$ est une classe NON fermée. $\{3\}$ ne mène à aucun état, c'est une classe fermée.

L'ex. 5. Pour $p \neq 0$ la CM est irréductible. En effet, 1 mène à 2 (en un pas), et aussi 2 mène à 1 (en deux pas) (car 2 mène à 3 et 3 mène à 1), 1 mène à 3 (en deux pas : 1 à 2, et 2 à 3) et 3 mène à 1 (en un pas).

Pour $p = 0$ $\{1\}$ est une classe non fermée : 1 mène à 2, mais 2 ne mène pas à 1 (en effet de 2 on ne peut aller qu' en 3 et de 3 on ne peut aller qu'en 2, jamais en 1), $\{2,3\}$ est fermée.

L'ex. 6. Pour $p = 0, q = 0$ $\{1\}$ est fermée, $\{2\}$ est fermée. Pour $p = 0$, $q \neq 0$, $\{1\}$ est fermée, $\{2\}$ est non fermée, pour $p = 1$, $q = 0$, $\{1\}$ est non fermée, $\{2\}$ est fermée, $p = 1$, $q \neq 0$, $\{1,2\}$ est une classe (fermée), les cas avec $q = 0$ et $q = 1$ sont symétriques. Si $p, q \in]0,1[$, la CM est irréductible.

B. Pour la première matrice $\{1,2\}$, $\{7\}$ sont les classes fermées, $\{3\}$, $\{4\}$ et $\{5,6\}$ sont les classes NON fermées.

Pour la deuxième matrice $\{1,2,3\}$ et $\{5,7\}$ sont fermées, $\{4,6\}$ est NON fermée.

Pour la troisième matrice $\{1,5\}$, $\{2,3\}$ sont fermées, $\{4\}$ est NON fermée.

Exercice 8.

La classe $\{2,3\}$ de cette CM est non fermée, donc transiente, les états $\{1\}$ et $\{4\}$ sont absorbants, donc récurrents. Si la CM commence dans l'état 1, elle y reste pour toujours, la même chose pour l'état 4. Si la CM commence dans 2 ou 3, elle visite la classe $\{2,3\}$ un nombre fini de fois et au bout d'un temps aléatoire qui est fini p.s. elle s'absorbe dans l'état 1 ou l'état 4.

Calculons h_2^1 et h_3^1. On applique le Thm 6.4.2 du cours. On écrit $h_2^1 = 1/2h_1^1 + 1/2h_3^1$, $h_3^1 = 1/2h_4^1 + 1/2h_2^1$. Comme $h_1^1 = 1$ et $h_4^1 = 0$, on obtient un système linéaire avec deux inconnues, la solution est $h_2^1 = 2/3$, $h_3^1 = 1/3$.

Les probabilités $h_2^4 = 1 - h_2^1 = 1 - 2/3 = 1/3$, et $h_3^4 = 1 - h_4^1 = 2/3$.

Le temps moyen d'absorption $k_2 = 1 + 1/2k_1 + 1/2_3$, $k_3 = 1 + 1/2k_3 + 1/2k_4$. Ici $k_4 = 0$ et $k_1 = 0$. On obtient le système avec deux inconnus, dont on trouve facilement la solution. On a appliqué aussi le Thm 6.4. 2 avec $\nu_i(A)$ la probabilité d'absorption dans un ensemble récurrent qui est 1.

Exercice 9.
Les classes fermées sont récurrentes et les classes non fermées (comme elles sont finies !) sont transientes, cf. le cours., Prop. 6.4.4.

Si on note $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}$ le nombre de visites dans i, et $T^i = \min\{n \geq 1 : X_n\}$, l'instant de la première visite dans i (a partir de l'instant $n = 1$) : pour tout i récurrent on a : $P(T^i < \infty \mid X_0 = i) = 1$, $P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 1$. Pour tout i transient on a $P(T^i < \infty \mid X_0 = i) < 1$, $P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 0$

Dans le cas de l'exercice 3 : la CM est irréductible finie, donc récurrente. Chaque état sera visité une infinité de fois p.s., Corollaire 6.4.3.

L'ex 4. La CM ba s'absorber dans l'état 3 presque sûrement, Corollaire 6.4.2.

L'ex. 5. Pour $p \neq 0$ tout état sera visité une infinité de fois p.s., si $p = 0$ la CM va s'absorber dans la classe $\{2, 3\}$ et chaque état de cette classe sera visité une infinité de fois p.s.

L'ex. 6 **C**. Pour la première matrice $h_2^1 = 1$ car $1, 2$ sont dans la même classe récurrente, $h_3^1 = 1/5h_1^1 + 2/5h_3^1 + 2/5h_7^1 = 1/5 + 2/5h_3^1 + 0$. Donc $h_3^1 = 1/3$, comme $\{1, 2\}$ est une classe récurrente on a $h_3^2 = h_3^1$ (Cor. 6.4.3, partie 2). $h_3^7 = 1 - 1/3 = 2/3$.

$k_3 = 1 + 1/5k_1 + 2/5k_3 + 2/5k_7 = 1 + 0 + 2/5k_3 + 0$, $k_3 = 5/3$.

Pour la deuxième matrice $h_4^A = 2/7h_1^A + 1/7h_2^A + 0h_3^A + 1/7h_4A + 0h_5^A + 1/7h_6^A + 2/7h_7^A$ et $h_6^A = 0h_1^A + 0h_2^A + 2/7h_3^A + 0h_4^A 1/5h_5^A + 0h_6^A + 4/5h_7^A$. Ici $h_1^A = h_2^A = h_3^A = 1$ car $\{1, 2, 3\}$ est une classe rćurrente, $h_5^A = h_7^A = 0$ car $\{5, 7\}$ est recurrente fermée. On résout ce systeme, et on obtient $h_4^A = 23/41$, $h_6^A = 15/41$. Donc $h_4^B = 1 - 23/41$, $h_6^B = 1 - 15/41$.

$k_4 = 1 + 2/7k_1 + 1/7k_2 + 0k_3 + 1/7k_4 + 0k_5 + 1/7k_6 + 2/7k_7$, $k_6 = 1 + 0k_1 + 0k_2 + 2/7k_3 + 1/7k_4 + 4/7k_5 + 0k_6 + 0k_7$, ici $k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = k_7 = 0$. On retrouve k_4 et k_6.

Pour la troixième matrice : $h_4^1 = 1/8h_1^1 + 2/8h_2^1 + 1/8h_3^1 + 3/8h_4^1 + 1/8h_5^1$. Ici $h_1^1 = h_5^1 = 1$ car $\{1, 5\}$ sont dans la même classe récurrente, $h_2^1 = h_3^1 = 0$ car $\{2, 3\}$ est une autre classe récurrente. Donc $h_4^1 = 2/5$. Par conséquent $h_4^2 = 1 - h_4^1 = 3/5$.

$k_4 = 1 + (1/8 + 2/8 + 1/8)0 + 3/8k_4 + (1/8)0$, d'où la valeur de k_4.

Exercice 10.
a) Si $p = 1$, les classes sont $\{i\}$ non fermées, $i \in \mathbf{Z}$, la CM fait un mouvement deterministe $X_{n+1} = X_n + 1$. Si $q = 1$, les classes sont les mêmes, $X_{n+1} = X_n - 1$.

Pour $p, q \in]0, 1[$, tout état i mène à un autre état j (en $|j - i|$ pas), la CM est irréductible. On a $X_n = X_0 + V_1 + \cdots + V_n$ où $V_1, V_2, \ldots$ sont des v.a. indépendantes, de même loi à valeurs -1 et 1 avec probabilité q et p respectivement.

Si $p \neq q$: $(V_1 + \cdots + V_n)/n \to p - q \neq 0$ p.s. par la loi de grands nombres. Par conséquent tout état est visité un nombre fini de fois p.s. La CM est transiente.

On a $P_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$. Si $p = q = 1/2$, ceci est équivalent à $const/\sqrt{n}$ (par la formule de Stirling), donc $\sum P_{00}^{2n}$ diverge, donc la CM est récurrente.

b) La CM est irréductible. On dessine des axes Z' et Z'' passant par $(0, 0)$ sour angles $\pi/4$ et $3\pi/4$ par rapport à l'axe Ox. Soit (Z'_n, Z''_n) les projections orthogonales de (X_n, Y_n) sur $2^{-1/2}Z'$, $2^{-1/2}Z''$. Alors on vérifie que Z'_n et Z''_n sont des marches aléatoires *indépendantes*, chacune est comme dans le cas précedent de dimension 1. En effet, par exemle $P(Z'_{n+1} - Z'_n = 1, Z''_{n+1} - Z''_n = 1) = P(X_{n+1} - X_n = 0, Y_{n+1} - Y_n = 1) = 1/4$, $P(Z'_{n+1} - Z'_n = 1) = P(X_{n+1} - X_n = 0, Y_{n+1} - Y_n = 1) + P(X_{n+1} - X_n = 1, Y_{n+1} - Y_n = 0) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, $P(Z''_{n+1} - Z''_n = 1) = P(X_{n+1} - X_n = 0, Y_{n+1} - Y_n = 1) + P(X_{n+1} - X_n = -1, Y_{n+1} - Y_n = 0) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, d'où $P(Z'_{n+1} - Z'_n = 1, Z''_{n+1} - Z''_n = 1) = P(Z''_{n+1} - Z''_n = 1)P(Z'_{n+1} - Z'_n = 1)$. Donc, en utilisant le résultat de a), $P_{00}^{(2n)} \sim \left(\binom{2n}{n}(1/2)^{2n}\right)^2 \sim const/n$. Donc $\sum P_{00}^{(2n)}$ diverge, la CM est récurrente.

c) La CM est irréductible.

$$P_{000}^{(2n)} = \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!j!k!i!j!k!}(1/6)^{2n} = \frac{2n!}{n!n!}(1/2)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} \frac{n!n!}{i!j!k!i!j!k!}(1/3)^{2n}.$$

La somme $\sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!}$ étant le nombre de prossibilités de distribuer n boules dans 3 urnes est égale à 3^n. Comme $n!/(i!j!k!) \leq n!/(n/3!)^3$ si n est un multiple de 3, on a $P_{000}^{2n} \leq \frac{2n!}{n!n!}(1/2)^{2n}\Big[n!/(n/3!)^3\Big](1/3)^n \sim const n^{-3/2}$. Donc $\sum_{m=0}^{\infty} P_{00}^{6m} < \infty$. Mais $P_{000}^{6m} \geq (1/6)^2 P_{000}^{6m-2}$ et $P_{000}^{6m} \geq (1/6)^4 P_{000}^{6m-4}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P_{000}^{(2n)} < \infty$, la CM est transiente. On rencontre une CM irréductible mais transiente, ceci est possible seulement sur E infini !

Pour tout $R > 0$ l'ensemble $\{\vec{x} \in \mathbf{Z}^3 : \|x\| \leq R\}$ contient un nombre fini d'états transients. Cet ensemble est donc abanodnné pour toujours au bout d'un temps fini p.s. Alors $\mathbf{P}(\|X_n\| \to \infty, n \to \infty) = 1$

Exercice 11.

a) On résout $\mu = \mu Q$, μ est vecteur ligne ! Comme Q est irréductible, μ est unique à une constante près. $\mu_1 = \mu_2(1/2) + \mu_3(1/2)$, $\mu_2 = (1/2)\mu_1 + (1/2)\mu_3$, $\mu_3 = (1/2)\mu_1 + (1/2)\mu_2$. Alors $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Donc $\mu = const(1,1,1)$. Pour avoir la loi de probabilité, on prend $const = 1/3$.

La loi initiale proposée est la loi stationnaire. Donc sous cette loi, $\mathbf{P}(X_n = 2) = \mu_2 = 1/3$ pour tout $n \geq 0$.

b) Les états 1 et 2 sont transients, alors $\mu_1 = \mu_2 = 0$. On a $\mu_3 = const$, on prend $const = 1$ pour avoir une loi de probabilité.

c) On résout encore $\mu = \mu P$, $\mu_1 = p\mu_3$, $\mu_2 = \mu_1 + (2/3)\mu_2 + (1-p)\mu_3$, $\mu_3 = 1/3\mu_2$. Donc $\mu = const(p,3,1)$. On prend $const = (p+3+1)^{-1}$. On voit que si $p = 0$, $\mu_1 = 0$ ce qui est bien en accord avec le fait que dans ce cas l'état 1 est transient, cf. l'ex 5.

d) On a $\mu = \mu M$, alors $\mu = (q,p)const$ avec $const = (p+q)^{-1}$.

e) Pour Q_1 : il faut résoudre $\mu = \mu Q$. Comme c'est un système assez grand, essayons d'être astucieux. Les états 3,4,5,6 sont transients. Alors $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 0$, Il reste deux systèmes d'équations. L'un correspond à la classe $\{1,2\}$:$\mu_1 = (1/2)\mu_1 + (1/3)\mu_2$, $\mu_2 = (1/2)\mu_1 + (2/3)\mu_2$, on a $(\mu_1,\mu_2) = const(1/3,1/2)$. L'autre système est de la classe $\{7\}$: $\mu_7 = \mu_7$. Donc $\mu = ((1/3)c_1, (1/2)c_1, 0, 0, 0, 0, c_2)$. Les constantes $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ sont liées par le fait que $c_1(1/3 + 1/2) + c_2 = 1$ pour avoir une loi de probabilité.

La loi initiale proposée est une loi de probabilité stationnaire avec $c_1 = 1, c_2 = 1/6$. Donc $\mathbf{P}(X_n = i) = \mu_i$ pour tout $n \geq 0$, donc $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/3$, $\mathbf{P}(X_n = 7) = 1/6$ pour tout (!) $n \geq 0$.

f) Pour Q_2: posons tout de suite $\mu_4 = \mu_6 = 0$ et résolvons deux systèmes : l'un pour $\{1,2,3\}$ $\mu_1 = 1/2\mu_1 + 1/4\mu_3, \mu_2 = 1/2\mu_1 + 2/3\mu_3, \mu_3 = 1/3\mu_2 + 3/4\mu_3$, l'autre pour $\{5,7\}$ $\mu_5 = 1/5\mu_5 + 2/5\mu_7, \mu_7 = 4/5\mu_5 + 3/5\mu_7$. On a $\mu = (c_1, 3/2c_1, 2c_1, 0, c_2, 0, 2c_2)$ avec $c_1(1+3/2+2) + c_2(1+2) = 1$, $c_1, c_2 \geq 0$.

g) Pour Q_3 : $\mu = (c_1, c_2, 8/3c_2, 0, 2c_1)$ avec $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 + 8/3c_2 + 2c_1 = 1$.

Exercice 12.

1) Si la matrice Q est bistochastique, alors non seulement la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1, mais celle sur chaque colonne aussi. Cela peut sécrire matriciellement, en notant $\nu = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, sous la forme

$$\forall j \in I, \quad \sum_i Q_{i,j} = \sum_i \nu_i Q_{i,j} = (\nu Q)_j = \nu_j = 1$$

Le vecteur ligne ν est donc vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1 : $\nu Q = \nu$. En le normalisant pour que la somme des coefficients soit égale à 1, on obtient le vecteur $\mu = \frac{1}{|E|}\nu$ qui vérifie la même relation $\mu Q = \mu$: μ est donc une loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov (on n'a pas unicité a priori).

2) Dans le cube, chaque sommet a 3 voisins, et tous les coefficients non-nuls valent $\frac{1}{3}$. Comme on peut arriver à chaque sommet en venant de 3, sommets, la matrice de transition a 3 coefficients non nuls dans chaque colonne, qui somment à 1 : la matrice est bistochastique. Cette chaîne est irréductible. Donc la mesure uniforme $\mu = (1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)$ est la seule loi stationnaire.

Notons E l'ensemble des sommets. Le temps de retour moyen en i est noté $t_i(\omega) = E_i(T^i)$. Notre chaîne de Markov est irréductible, donc $t_i = E_i(T^i) = \frac{1}{\mu_i} = 8$.

Exercice 13.
1) On a $\sum_j \mu_i Q_{i,j} = \sum_j \mu_j Q_{j,i} = \mu_j \sum_j Q_{j,i} = \mu_j$ car Q est stochastique. Donc $\mu = \mu Q$, et alors μ proprement normalisé est une loi stationnaire.

2) Si le graphe est connexe, pour toute paire de sommets i et j, il existe une suite de sommets $i = h_0,\ h_1,\ h_2 \ldots, h_m = j$, telle que h_{i-1} et h_i sont connectées par une arête. Alors $Q_{ij}^{m+1} \geq Q_{ih_1} Q_{h_1,h_2} \cdots Q_{h_{m-1},h_m} > 0$. La CM de Markov est irreductible.

On vérifie les équations $\mu_i Q_{i,j} = (k_i/k)(1/k_i) = (k_j/k)(1/k_j) = \mu_j Q_{j,i}$. Donc c'est une loi stationnaire, et comme la CM est irréductible, c'est l'unique loi stationnaire.

Le temps moyen recherché est égal à l'inverse de la la loi stationnaire de la marche aléatoire sur le graphe ce qui est k/k_i si le sommet initial est i.

Exercice 14.
a) Cette CM est irréductible. $Q_{1,1}^{(2)} \geq Q_{1,2} Q_{2,1} = (1/2)(1/2) > 0$ et aussi $Q_{1,1}^{(3)} \geq Q_{1,2} Q_{2,3} Q_{3,1} = (1/2)^3 > 0$. Alors l'ensemble $\{i : Q_{1,1}^{(i)} > 0\}$ inclut 2 et 3. Donc son pgcd est 1, et donc l'état 1 est apériodique. Alors toute la CM est apériodique.

Par le Thm de convérgence vers la loi stationnaire d'une CM finie irréductible et apériodique, les limites demandées valent la loi de probabilité stationnaire $\mu_i = 1/3$ pour $i = 1, 2, 3$.

b) La classe $\{1, 2\}$ est transiente, donc la limite demandé vaut 0 pour $i = 1, 2$. La CM va aboutir à l'état 3 avec probabilité 1. Donc la limite demandée vaut 1 pour $i = 3$.

c) Pour $p \neq 0$ on a une CM irréductible et comme $P_{2,2} > 0$, l'état 2 et donc toute la chaine est apériodique. Alors les limites demandées valent $p(p+3+1)^{-1}$ $3(p+3+1)^{-1}$ et $(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$ respectivement.

Pour $p = 0$ l'état 1 est transient. Alors la limite demandée vaut 0 pour $i = 1$. La CM va aboutir dans la classe récurrente $\{2, 3\}$ avec probabilité 1. Cette classe est apériodique car $2/3 > 0$ sur la diagonale. La loi de probabilité stationnaire de cette classe est $(3/4, 1/4)$. Donc la limite demandée vaut $3/4$ pour $i = 2$ et $1/4$ pour $i = 3$.

La matrice limite $\lim_{n\to\infty} P^n = D$ se compose de $D_{i,1} = p(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$, de $D_{i,2} = 3(p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$ et de $D_{i,3} = (p+3+1)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$.

d) Si $p, q \in]0, 1[$ la CM est irréductible. Elle est apériodique, car un élément sur la diagonale est > 0. Les limites demandées valent alors $q/(p+q)$ et $p/(p+q)$ respectivement.

Cette limite n'existe pas pour $p = q = 1$ car la CM est périodique alors de période 2 !

e) Comme $\{1, 2\}$ est une classe récurrente, et apériodique (l'élément $1/2 > 0$ sur la diagonale) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i(X_n = 2)$ pour $i = 1, 2$ vaut la loi stationnaire de la classe $\{1, 2\}$. Donc c'est $1/2(1/3 + 1/2)^{-1} = 3/5$ pour $i = 1, 2$ (voir l'ex. 11).

Pour $i = 3, 4, 5, 6$ cette limite vaut $h_i^A 3/5$ avec $h_i^A = \mathbf{P}(T^A < \infty \mid X_0 = i)$ pour $A = \{1, 2\}$. On a $h_i^{\{1,2\}} = h_i^1 = h_i^2$ pour tout $i = 3, 4, 5, 6$ car $\{1, 2\}$ est une classe récurrente. La valeur de $h_3^1 = h_3^A$ a été calculée dans l'ex. 9. Le calcul est h_i^A pour $i = 4, 5, 6$ est analogue.

Finalement, $\mathbf{P}_7(X_n = 2) = 0$ pour tout $n > 0$.

Pour ν une loi initiale, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 2) = (\nu_1 + \nu_2)(3/5) + (3/5) \sum_{i=3}^{6} h_i^A \nu_i$

De même $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1) = (\nu_1 + \nu_2)(2/5) + (2/5) \sum_{i=3}^{6} h_i^A \nu_i$

Comme $i = 3, 4, 5, 6$ sont transients, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 3, 4, 5, 6$.

Finalement, la loi stationnaire de la classe $\{7\}$ est une constante $= 1$. On a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1) = \sum_{i=3}^{6} h_i^7 \times 1 \times \nu_i + 1 \times \nu_7$. Ici $h_i^7 = 1 - h_i^A$ avec $A = \{1, 2\}$.

f) Les éléments de cette matice limite, notons la $R = (R_{i,j})$, vont se composer de différentes limites $R_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i(X_n = j)$. Pour $j = 4, 6$ ces limites sont 0 car ces états sont transients. Donc la quatrième et la sixième colonne de R sont 0. Calculons la première colonne. La loi stationnaire pour la classe $A = \{1, 2, 3\}$ est $1/(1 + 3/2 + 2) = 2/9$ pour $i = 1$, $(3/2)(1 + 3/2 + 2)^{-1} = 1/3$ pour $i = 2$ et $2(1 + 3/2 + 2)^{-1} = 4/9$ pour $i = 3$, voir l'ex. 11. Cette classe est apériodique. Donc $R_{11} = 2/9$, $R_{2,1} = 2/9$, $R_{3,1} = 2/9$, $R_{4,1} = h^A_4(2/9) = (23/41)(2/9)$, $R_{5,1} = 0$ car $\{5, 7\}$ est fermée, $R_{6,1} = h^A_6(2/9) = (15/41)(2/9)$, $R_{7,1} = 0$, cf. l'ex. 9 pour les valeurs de h^A_6 et h^A_4.

$R_{12} = 1/3$, $R_{2,2} = 1/3$, $R_{3,2} = 1/3$, $R_{4,2} = h^A_4(1/3) = (23/41)(1/3)$, $R_{5,2} = 0$ car $\{5, 7\}$ est fermée, $R_{6,2} = h^A_6(1/3) = (15/41)(1/3)$, $R_{7,1} = 0$,

$R_{13} = 4/9$, $R_{2,3} = 4/9$, $R_{3,3} = 4/9$, $R_{4,3} = h^A_4(4/9) = (23/41)(4/9)$, $R_{5,3} = 0$ car $\{5, 7\}$ est fermée, $R_{6,3} = h^A_6(4/9) = (15/41)(4/9)$, $R_{7,1} = 0$,

La loi stationnaire de la classe $\{5, 7\}$ est $(1/3, 2/3)$, voir l'ex. 9. Cette classe est apériodique. Alors $R_{i,5} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, $R_{4,5} = h^B_4(1/3) = (1 - 23/41)(1/3)$, $R_{5,5} = 1/3$, $R_{6,5} = h^B_6(1/3) = (1 - 15/41)(1/3)$, $R_{7,5} = 1/3$.

$R_{i,7} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, $R_{4,7} = h^B_4(2/3) = (1 - 23/41)(2/3)$, $R_{5,7} = 2/3$, $R_{6,7} = h^B_6(2/3) = (1 - 15/41)(2/3)$, $R_{7,7} = 2/3$.

Exercice 15.
Cette CM est irréductible. La loi stationnaire est $(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$. On observe que $M^{(n)}_{1,1} > 0$ ssi n est pair, donc la période de cette CM est 2. Le Théorème sur la convergence vers la loi stationnaire ne s'applique pas !

Par contre on peut appliquer le Thm érgodique : $(1/n)\sum_{i=1}^n f(X_n) \to 1/8f(1) + 3/8f(2) + 3/8f(2) + 1/8f(1)$.

Exercice 16.
(1) La matrice de transition $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = a_{j-(i-1)}1_{\{i>0,j<c\}} + a_{j-i}1_{\{i=0,j<c\}} + 1_{\{i>0,j=c\}}\sum_{k=c-(i-1)}^\infty a_k + 1_{\{i=0,j=c\}}\sum_{k=c}^\infty a_k$. Les mesures invariantes sont les solutions de l'équation $\pi P = \pi$ normalisées de la façon que $\sum_{i=1}^c \pi_i = 1$. La mesure de probabilité invariante est unique, si la CM a l'unique classe fermée d'états qui communiquent.

(2) Par le Thm ergodique $(n-1)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=0\}} \to \pi_0$ p.s. La limite $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ existe ssi la CM est apériodique et elle est égale à π_0. $ET = 1/\pi_0$.

Exercice 17.
Soit $Q = \max\{i : P(Y - 1 = i > 0)\}$. Si $Q < \infty$, X_n est une CM sur $\{0, 1, \ldots, Q\}$, sinon X_n est une CM sur $\{0, 1, 2, \ldots, \} = \mathbf{N}$. Elle est irréductible et apériodique (car 0 est un état apériodique sous l'hypothèse de l'exercice) dans les deux cas avec $P(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i) = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, et $P(X_{n+1} = k \mid X_n = 0) = P(Y - 1 = k)$.

(On peut voir le déroulement de cette CM de la façon suivante : soit $X_n = i$, cad $Y_1 + \cdots + Y_s = n+i$ pour un certain $s \geq 0$. Donc $n+i = \min\{m \geq n \ : Y_1+\cdots+Y_s = m$ pour un $s\}$. Si $i \geq 1$, alors, $\min\{m \geq n+1 \ : Y_1+\cdots+Y_s = m$pour un $s\} = n+i$. Alors, $X_{n+1} = n+i-(n+1) = i-1$. De même, si $i-1 \geq 1$, on a $X_{n+2} = n+i-(n+2) = i-2$. Et après i pas $X_{n+i} = n+i-(i+n) = 0$. Alors, sous condition $Y_1 + \cdots Y_s = n + i$, $\min\{m \geq (n+i+1) \ : Y_1 + \cdots + Y_l = m$ pour un $l\} = (n+i) + Y_{s+1}$, et $X_{n+i+1} = (n+i)+Y_{s+1}-n-i-1 = Y_{s+1}-1$. Donc $P(X_{n+i+1} = k \mid X_{n+i} = 0) = P(Y-1 = k)$.
)

Le temps moyen de retour en 0 est égal à $1 + E(Y - 1) = T = EY < \infty$. Donc elle a l'unique loi stationnaire μ avec $T = 1/\mu_0$ par le Thm énoncé et et $P(X_n = 0) \to \mu_0 = 1/T$.

Mais $P(\exists k > 0 : Y_1 + \cdots + Y_k = n) = P(X_n = 0)$, donc $\lim_{n\to\infty} P(\exists k > 0 : Y_1 + \cdots + Y_k = n) \to 1/EY$.