(iii) En utilisant le th. des fct implicites, mq il existe une application C^∞ $[-1,1] \longrightarrow C^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\quad d \mapsto f_d$ tq $\forall d$, f_d soit solution de l'équation fonctionnelle

$$(E_d) \qquad f(t+\sqrt{2})^2 + f(t-\sqrt{2})^2 + 100 f(t) = d \sin(2\pi t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Pour appliquer le th. des fct implicites, on considère (comme ds la preuve du th. d'inversion locale) l'application C^∞

$$\Psi : \mathbb{R} \times C^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(d, g) \longmapsto T_+(g) + T_-(g) + 100\, g - d \sin(2\pi \cdot)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial g}(f) \cdot h = \left(DT_+(f) + DT_-(f) + 100\, id\right) \cdot h$$
$$= 100 \Big(\underbrace{id + \underbrace{\frac{DT_+(f) + DT_-(f)}{100}}_{T_f}}_{Id + T_f} \Big) \cdot h$$

$$T_f \cdot h = \frac{1}{100}\left[2 f(\cdot+\sqrt{2})\, h(\cdot+\sqrt{2}) + 2 f(\cdot-\sqrt{2})\, h(\cdot-\sqrt{2})\right]$$

$$|||T_f||| \leq \frac{4\,\|f\|_\infty}{100}$$

Alors

pour $\|f\|_\infty < 25$, on a $|||T_f||| < 1$ et $(Id + T_f)$ est inversible (exo 5). et $100(Id+T)$ est inversible.

Conclusion : pour $\|f\|_\infty < 25$, $\frac{\partial \Psi}{\partial g}(f)$ est inversible.

(A) De plus $|||\frac{\partial \Psi}{\partial g}(f)^{-1}|| \leq \frac{1}{100} \times \sum \|T_f\|^k \leq \frac{1}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{100}\|f\|_\infty} = \frac{1}{100 - 4\|f\|_\infty}$

TFI : au voisinage de toute solution de $\Psi(d,g) = 0$ avec $\|g\|_\infty < 25$, on a une famille de solutions variant de façon C^∞ en le paramètre d.