# MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

27 septembre, 2011



## Sommaire du cours 7





## Plan du cours 7

1. Sous-variétés
   - Définition
   - Diverses représentations
2. Espace tangent
3. Points critiques des fonctions
   - Extrema liés
   - Héssienne
4. Champs de vecteurs sur les sous-variétés
5. Sous-variétés à bord
   - Sous-variétés orientables



## Plan du cours 7

Lire :

1 : Tout le chapitre 8 de [V].

**Remarque** :

(1) Les transparents et l'énoncé du devoir (ainsi que leurs versions révisées) sont disponibles à l'adresse : http ://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp ?RH=1254312611509

(2) Errata (énoncé du devoir) :

  (a) Dans l'exercice 1 : on suppose que $f$ est un homéomorphisme $C^1$ de $I$ sur $J$

  (b) Ex. 1, Q4 "Expliquer ... "$F(U) \cap V$ est un fermé de V" ..."

  (c) Ex. 3, Q3 : "Soit $\delta$ *suffisamment petit.*"



# Sommaire du cours 7





# Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

## Introduction

La notion de sous-variété généralise, en dimension supérieure, la notion de courbe et de surface dans $\mathbb{R}^n$.

Cette notion apparaît naturellement quand on étudie des systèmes dynamiques où des quantités sont conservées ou, en Physique, des systèmes vérifiant des contraintes (exemple : une particule astreinte à se déplacer sans frottement sur une surface).

Une notion plus générale est la notion de variété : l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$ n'est plus nécessaire pour les définir. On peut alors munir d'une structure différentiable des objets topologiques obtenus par quotients et recollements (exemple le plus simple : les tores $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$). Nous n'en parlerons pas dans ce cours.

Outils de base : Théorème des fonctions implicites et théorème d'inversion locale.



# Sous-variétés

## Définition

**Définition**

*Un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété ($C^\infty$) si pour tout $x \in N$ il existe un ouvert $U_x$ de $\mathbb{R}^n$, contenant $x$, un entier $k \leqslant n$ et un difféomorphisme $\varphi : U_x \to \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

*L'entier $k$ s'appelle la dimension de $N$ en $x$. La paire $(U, \varphi)$ s'appelle une carte locale en $x$.*

**Proposition**

*La dimension d'une sous-variété $N$ de $\mathbb{R}^n$ en un point $x$ est définie de façon unique. Si $N$ est connexe, cet entier est indépendant de $x$ et s'appelle la dimension de la sous-variété $N$.*

**Proposition**

*$N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété ssi pour tout point $x_0 \in N$ il existe un ouvert $W$ de $\mathbb{R}^n$, $W \ni x_0$ sur lequel l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

- *(i) Graphe : il existe $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ et $u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^\infty$ telles que $W \cap N = W \cap A \cdot \left(\{(z, u(z)) : z \in \mathbb{R}^k\}\right)$*
- *(ii) Equation : il existe une application $C^\infty$, $F : \mathbb{R}^n \supset W \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que $DF(x_0)$ est surjective et $W \cap N = F^{-1}(0)$*
- *(iii) Nappe paramétrée : Il existe $j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^\infty$ et définie sur un voisinage $U$ de 0 telle que $j(0) = x_0$, $Dj(0)$ est injective et $j$ est une bijection bicontinue $j : U \to N \cap W$.*





Démonstration : Par exemple pour (ii)
Si $N$ est une sous-variété : choisissons une carte $(U_{x_0}, \varphi)$ ; alors localement $N$ est l'ensemble des $y \in U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ pour lesquels $F(y) = 0$ où $F$ est la projection sur $\mathbb{R}^{n-k}$ de $\varphi$ : $DF(x_0)$ est bien surjective.
Réciproquement, si $N$ est définie localement par $F = 0$ où $DF(x_0)$ est surjective : Comme $DF(x_0)$ est surjective, il existe un espace vectoriel $E$, $\dim E = \mathbb{R}^{n-k}$ tel que $DF(x_0)_{|E}$ soit bijective sur $\mathbb{R}^{n-k}$. Notons $H$ un supplémentaire et $\psi : H \oplus E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\psi(u, v) = (u, F(u, v))$. On a $\psi(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ssi $F(u, v) = 0$ donc ssi $(u, v) \in N$. Vérifions que $\psi$ est un difféomorphisme local :
$D\psi(u_0, v_0) \cdot (\Delta u, \Delta v) = (\Delta u, D_u F(x_0) \cdot \Delta u + D_v F(x_0) \cdot \Delta v)$.
Le théorème d'inversion locale s'applique ; on pose $\varphi = \psi^{-1}$ □





Une sous-variété n'est pas nécessairement fermée : par exemple une spirale image de $t \mapsto e^{-t+it}$.
La sphère $\mathbb{S}^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ est une sous-variété : Si $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est définie par $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = -1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ on a $\mathbb{S}^n = F^{-1}(0)$. On calcule $DF(x) = 2x_1 dx_1 + \dots + 2x_{n+1} dx_{n+1}$ ; surjective si $x \neq 0$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{S}^n$ : $\mathbb{S}^n$ est bien une sous-variété.
Le tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ : c'est l'image de $j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$j(\theta, \varphi) = ((r - \rho\cos\theta)\cos\varphi, (r - \rho\sin\theta)\sin\varphi, \rho\sin\varphi)$





Immersion :

**Définition (Immersion)**

*On dit que $j : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$ est une immersion si $Dj(x)$ est injective en tout $x \in U$. L'image $j(U)$ n'est pas nécessairement une sous variété.*

Par abus de langage on parle de sous-variété immergée.
Exemple : le "huit". Ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ mais c'est une sous-variété immergée.

## Sommaire du cours 7





## Espaces tangents

### Définition

Soit $N$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ deux cartes locales en $x \in N$.
On a $D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.
Comme $D(\psi \circ \varphi^{-1})$ est injective on a
$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.
En composant par $D\psi^{-1}(\psi(x))$ on obtient
$D\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = D\psi^{-1}(\psi(x)) \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

**Définition**

*L'espace vectoriel $D\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cdot (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^n$ ainsi obtenu, qui ne dépend pas de la carte $(U, \varphi)$ choisie en $x$ s'appelle l'espace tangent à $N$ en $x$ et se note $T_xN$. L'espace affine tangent à $N$ en $x$ est celui passant par $x$ et de direction $T_xN$ ; on le note $\tilde{T}_xN$.*



## Espaces tangents

### Définition

- Si $N$ est définie localement en $x$ comme un graphe $\{(z, u(z)) : z \in \mathbb{R}^k\}$ on a $T_xN = \{(h, Du(x) \cdot h) : h \in \mathbb{R}^k\}$.
- Si $N$ est définie localement en $x$ par une équation $F(x) = 0$ où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que $DF(x)$ est localement surjective, alors $T_xM = \ker DF(x)$.
- Si $N$ est définie localement en $x$ comme l'image par $j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ où $j(0) = x$ et $Dj(0)$ est injective, alors $T_xM = Dj(0) \cdot \mathbb{R}^k$.



## Espaces tangents

### Définition

On a la caractérisation suivante

**Proposition**

*L'espace tangent $T_xN$ est l'ensemble de tous les vecteurs vitesses $\dot{\gamma}(0)$ où $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^\infty$.*

## Espaces tangents
### Exemples

La sphère $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ admet pour espace tangent en $x$ l'hyperplan $\ker DF(x)$ qui est orthogonal à $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Le cône $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ n'est pas une variété.



## Sommaire du cours 7





## Points critiques des fonctions sur les sous-variétés
### Définition

Problème : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ et $N$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On se propose de déterminer

$$\max_{x \in N} f(x)$$

et l'ensemble des points où ce maximum est atteint ; plus généralement on veut déterminer l'ensemble des points critiques $x \in N$ de $f$ restreinte à $N$.



**Définition**

*On dit que $x \in N$ est un point critique de $f$ si $Df(x)_{|T_x N} = 0$.*

**Proposition**

- *$x \in N$ est un point critique de $f$ ssi pour tout chemin $C^1$, $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N \subset \mathbb{R}^n$, passant par $x$ ($\gamma(0) = 0$) on a $\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))_{|t=0} = 0$.*
- *Si $x \in N$ est un maximum ou un minimum local de $f_{|N}$, alors c'est un point critique.*

$x_0$ est un point critique de $f$,

- quand $N$ est définie localement en $x_0$ comme un graphe, $\{(z, u(z)) : z \in \mathbb{R}^k\}$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, u(x_0)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = 0$
- quand $N$ est définie localement en $x$ par une équation, $F(x) = 0$ où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que $DF(x)$ est localement surjective, ssi $\ker DF(x_0) \subset \ker df(x_0)$.
- Si $N$ est définie localement en $x_0$ comme l'image par $j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ où $j(0) = x_0$ et $Dj(0)$ est injective, ssi $Df(j(0)) \cdot Dj(0) = 0$





**Corollaire (Extrema liés)**

*Soit $V = \{x : F(x) = 0\}$ où $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ a sa différentielle surjective en tout point de $V$. Alors, pour que la restriction de $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à $V$ ait un point critique en $x_0$ il faut et il suffit qu'il existe $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ tel que*

$$Df(x_0) = \langle w, DF(x_0) \rangle.$$





Problème : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $N$ une sous-variété de dimension $n-1$. Comment déterminer si un point critique de $f$ est un maximum ou un minimum local (ou pas) ?
On a $T_{x_0}N \subset \ker Df(x_0)$ donc $Df(x_0)_{|T_{x_0}N} = 0$.
Soit $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ un chemin $C^\infty$ tracé sur $N$ et passant par un point critique $x_0 \in N$ de $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $(\gamma(0) = x_0)$. On a

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(0)) + t\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)_{t=0} + (t^2/2)\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)_{t=0} + o(t^2).$$

On a
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)_{t=0} = Df(x_0) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0$$
car $x_0$ est un point critique.





En outre,
$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)_{t=0} = D^2 f(x_0) \cdot (\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) + Df(x_0) \cdot \ddot{\gamma}(0)$$

Le fait remarquable est que cette quantité est quadratique en $\dot{\gamma}(0)$ (malgré le terme en $\ddot{\gamma}(0)$).
Pour le voir, soit $(U, \varphi)$ une carte locale en $x_0 = \dot{\gamma}(0)$ et notons
$$\gamma_\varphi = \varphi \circ \gamma, \quad f_\varphi = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R};$$
on peut supposer $\varphi(x_0) = 0$. Si on note $p_k$ la projection de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ et $\tilde{\gamma}_\varphi = p_k \circ \gamma_\varphi$, $\tilde{f}_\varphi = f_{\varphi|\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ on a
$$f \circ \gamma = f_\varphi \circ \gamma_\varphi = \tilde{f}_\varphi \circ \tilde{\gamma}_\varphi.$$

Comme tout à l'heure

$$\tilde{f}_\varphi(\tilde{\gamma}_\varphi(t)) = \tilde{f}_\varphi(\tilde{\gamma}_\varphi(0)) + t\frac{d}{dt}(\tilde{f}_\varphi \circ \tilde{\gamma}_\varphi)_{t=0} + (t^2/2)\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{f}_\varphi \circ \tilde{\gamma}_\varphi)_{t=0} + o(t^2)$$

où

$$\frac{d}{dt}(\tilde{f}_\varphi \circ \tilde{\gamma}_\varphi)_{t=0} = D\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0) = 0$$

et

$$\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{f}_\varphi \circ \tilde{\gamma}_\varphi)_{t=0} = D^2\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot (\dot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0), \dot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0)) + D\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0).$$

Mais à présent $(D\tilde{f}_\varphi)_{|\mathbb{R}^k} = 0$ si bien que (remarquer que $\ddot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0) \in \mathbb{R}^k$)

$$D\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0) = 0.$$





On a donc

$$\tilde{f}_\varphi(\tilde{\gamma}_\varphi(t)) = \tilde{f}_\varphi(0) + (t^2/2)D^2\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot (\dot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0), \dot{\tilde{\gamma}}_\varphi(0)) + o(t^2)$$

Si on note $H(x_0) \cdot (v, v)$ la forme quadratique définie sur $T_{x_0}N$ par $H(x_0) \cdot (v, v) = D^2\tilde{f}_\varphi(x_0) \cdot (D\varphi(x_0) \cdot v, D\varphi(x_0) \cdot v)$ on voit que

$$f(\gamma(t)) = f(x_0) + (t^2/2)H(x_0) \cdot (\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) + o(t^2).$$

C.Q.F.D.

Incidemment, cela démontre que la forme quadratique $H(x_0)$ ainsi obtenue est indépendante de la carte $(U, \varphi)$ choisie.





Remarque : L'interprétation mécanique du fait précédent est que le vecteur accélération $\ddot{\gamma}(0)$ a une composante tangentielle (qui est annulée par $Df(x_0)$) et une composante normale qui est proportionnelle au carré de la vitesse (et à la courbure) "$v^2/r$".





On appelle $H(x_0)$ la héssienne au point critique $x_0$.

**Proposition**

*Si la héssienne de $f$ au point critique $x_0$ est définie positive (resp. négative) alors $f_{|N}$ admet un minimum (resp. maximum) local en $x_0$.*

## Sommaire du cours 7





## Champs de vecteurs sur les sous-variétés

On considère à présent la situation suivante : $(t,x) \mapsto X(t,x)$ est un champ de vecteurs de classe $C^1$ défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $N$ est une sous variété de $N$.

**Proposition**

*Si $N$ est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$ et $X$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in N,\ X(t,x) \in T_x N$$

*alors, si $\gamma(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle $\dot\gamma(t) = X(t,\gamma(t))$, $\gamma(0) \in N$ définie sur l'intervalle de temps $[0,s]$, on a pour tout $t \in [0,s]$, $\gamma(t) \in N$.*



## Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Démonstration : Soit $\tau = \sup\{t \in I : \gamma([0,t]) \subset N\}$. On veut montrer que $\tau = s$. Comme $N$ est fermée, $\gamma(\tau) \in N$.
On choisit une carte locale $(U,\varphi)$ en $\gamma(\tau) \in N$ et on pose $Y = \varphi_* X$.
Dans les nouvelles coordonnées $(u,v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ l'équation différentielle s'écrit sous la forme

$$\dot u(t) = A(t,u(t),v(t)), \quad \dot v(t) = B(t,u(t),v(t)), \quad u(\tau) = u_0,\ v(\tau_0) = 0. \qquad (*)$$

où $B(t,u,0) = 0$ (c'est l'hypothèse $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in N, X(t,x) \in T_x N$).
Si $u(\cdot)$ est la solution sur $[0,\tau+\epsilon]$ de $\dot u(t) = A(t,u(t),0)$, $u(\tau) = u_0$ on constate que $(u(t),0)$ est solution de $(*)$ sur $[0,\tau+\epsilon]$.
On a donc $\tau = s$ $\square$



## Sommaire du cours 7

## Sous-variétés à bord
### Définition

Notons $\mathbb{H}^k = \{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 \leqslant 0\}$ le demi-espace de $\mathbb{R}^k$.

**Définition**

*Un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété à bord ($C^\infty$) si pour tout $x \in N$ il existe un ouvert $U_x$ de $\mathbb{R}^n$, contenant $x$, un entier $k \leqslant n$ et un difféomorphisme $\varphi : U_x \to \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

- *(i) soit $\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$*
- *(ii) ou $\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap (\mathbb{H}^k \times \{0\})$.*

*Chacune de ces deux situations exclut l'autre. L'entier $k$ s'appelle la dimension de $N$ en $x$ (si $N$ est connexe, il est constant). L'ensemble des $x$ pour lesquels on est dans le cas (ii) s'appelle le bord $\partial N$ de $N$.*



## Sous-variétés à bord

**Proposition**

*Si $N$ est une sous-variété de dimension $k$ à bord, son bord $\partial N$ est une sous-variété sans bord de dimension $k-1$.*



## Sous-variétés orientables
### Définition

**Définition**

*Une sous-variété $N$ (à bord) de dimension $k$ est orientable s'il elle admet un sous-atlas $\{(U, \varphi)\}$ tel que pour tout changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ le déterminant de $D(\psi \circ \varphi^{-1})$ est positif.*

Remarque :Il existe des sous-variétés qui ne sont pas orientables : cf. Bande de Möbius.



## Sous-variétés orientables
### Normale extérieure à une hypersurface

Une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ compacte, connexe, sans bord est toujours orientable : elle admet un intérieur et un extérieur (composantes connexes bornée et non-bornée de $\mathbb{R}^n - N$).
On peut définir dans ce cas la normale extérieure $\nu(x) \in (T_x N)^\perp$ ($\|\nu(x)\| = 1$) en tout point $x \in N$ : celle pour laquelle $x + \epsilon\nu(x)$ appartienne à l'extérieur de $N$ dès que $\epsilon > 0$ est assez petit. Si $N = F^{-1}(E)$, $E > 0$, où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ alors la normale extérieure est

$$\nu(x) = \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$$