MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

20 septembre, 2011

Sommaire du cours 6

Plan du cours 6

1. Stabilité
   - Critère de Routh
   - Fonctions de Lyapunov
2. Champs de vecteurs (autonomes) en dimension 2
   - Perturbations des appl. conservatives
   - Le théorème de Poincaré-Bendixon
3. Redressement des flots

Plan du cours 6

Lire :

1. Pour la stabilité (critère de Routh, Lyapunov et flots hamiltoniens) : chapitre 6 de [V]
2. Pour le théorème de Poincaré-Bendixon et le redressement des flots : chapitre 5 de [V], sections 1, 3 et 4.

Remarque : Les transparents (ainsi que leurs versions révisées) sont disponibles à l'adresse :
http ://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp ?RH=1254312611509

Sommaire du cours 6

Stabilité des points singuliers et des orbites périodiques

La notion d'application de Poincaré introduite dans le cours précédent se révèle être un outil très précieux pour l'étude de la stabilité des équations différentielles

Nous donnons dans la suite des critères de stabilité connus sous le nom de critères de Routh

Stabilité des points singuliers

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et x_0 un point singulier de X : $X(x_0) = 0$. Nous nous proposons de donner des critères de stabilité asymptotique.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire)

Supposons que $X(x_0) = 0$ et $DX(x_0)$ ait toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Alors, x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable quand $t \to \infty$.

Stabilité des points singuliers

Démonstration Supposons $x_0 = 0$. On a $D\phi^T(0) = e^{TDX(0)}$.
D'après l'hypothèse, $e^{TDX(0)} \to 0$ quand $T \to \infty$. Donc il existe un T pour lequel $\|e^{TDX(0)}\| < 1/2$.
Comme $\phi^T(x) = D\phi^T(0) \cdot x + o(x)$ on a pour $\|x\|$ suffisamment petit

$$\|\phi^T(x)\| \leqslant (3/4)\|x\|.$$

Ainsi, $\phi^{nT}(x)$ tend exponentiellement vite vers 0.
Si on écrit $\phi^t(x) = \phi^{t-nT} \circ \phi^{nT}(x)$, $0 \leqslant t - nT \leqslant T$ on voit que $\phi^t(x)$ tend vers 0. $\square$

Stabilité des orbites périodiques cas autonome

On considère à présent l'EDO $x'(t) = X(x(t))$ et on suppose que $\phi_X^t(x_0)$ est une orbite périodique.
Les résultats du cours 5 sur les liens entre la résolvante de l'équation linéarisée de $x'(t) = X(x(t))$ et l'application de Poincaré P (cours 5, p. 20) , ainsi que le critère de stabilité d'une orbite périodique en fonction des valeurs propres de P (cours 5, p. 25) se traduisent sous la forme suivante :

Théorème (Critère de Routh non-linéaire, cas autonome)

Si la résolvante $R(T,0)$ de l'équation linéarisée au voisinage de l'orbite périodique $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(\phi^t(x_0)) \cdot v(t)$$

à $n-1$ valeurs propres de module < 1, alors l'orbite périodique $(\phi^t(x_0))$ est (orbitalement) asymptotiquement stable quand $t \to \infty$.

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

On considère à présent l'EDO $x'(t) = X(t, x(t))$ où $X(\cdot + T, x) = X(\cdot, x)$ pour tout x et on suppose que $\phi_X^{t,0}(x_0)$ est une orbite périodique.

Théorème (Critère de Routh non-linéaire pour les E.D.O. périodiques)

Si la résolvante $R(T,0)$ de l'équation linéarisée au voisinage de l'orbite périodique $(\phi^{t,0}(x_0))$

$$\dot{v}(t) = D_x X(t, \phi^{t,0}(x_0)) \cdot v(t)$$

à toutes ses valeurs propres de module < 1, alors l'orbite périodique $(\phi^{t,0}(x_0))$ est (orbitalement) asymptotiquement stable quand $t \to \infty$.

Remarque On peut déduire ce critère du cas autonome en remarquant que $\phi_X^{T,0}$ coïncide avec l'application de Poincaré $\tilde{P}$ du champ de vecteurs $\tilde{X}(\tilde{x}) := (1, X(t,x))$ (où $\tilde{x} = (t,x)$) défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour la section $\tilde{\Sigma} := \{0\} \times \mathbb{R}^n$. On a alors $R_X(T,0) = D\tilde{P}(\tilde{x}_0)$ ($\tilde{x}_0 = (0, x_0)$).

Stabilité des orbites périodiques pour des EDO périodiques

Démonstration Donnons une autre preuve. On a $D\phi^{T,0} = R(T,0)$.
On a vu qu'il existait une norme N et $0 \leqslant \lambda < 1$ tel que

$$\forall v \in \Sigma, \ N(R(T,0) \cdot v) \leqslant \lambda N(v).$$

(Il suffit en effet de prendre $N(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \|DP^k(x_0) \cdot v\|$ pour $\lambda <$ rayon spectral$(DP(x_0)) < 1$.)
Donc $N(\Phi^{T,0}(x)) \leqslant \lambda N(v) + o(N(v)) \leqslant (\lambda + \epsilon) N(v)$ si $\|v\|$ suffisamment petit.
Ainsi, $N(\phi^{nT,0}(x))$ tend vers 0 exponentiellement vite. ($\phi^{nT,0} = (\phi^{T,0})^n$ (itéré n-fois)).
Si on écrit $\phi^{t,0}(x) = \phi^{t-nT,0} \circ \phi^{nT,0}(x)$, $0 \leqslant t - nT \leqslant T$ on voit que $\phi^{t,0}(x)$ tend vers 0 quand $t \to \infty$. □

Fonctions de Lyapunov
Définition

On peut donner des critères plus généraux grâce à la notion de fonctions de Lyapunov.

Définition (Fonctions de Lyapunov)

Soit x_0 un zéro d'un champ de vecteurs $X(\cdot)$ et U un voisinage de x_0. Une fonction continue $L : U \to \mathbb{R}$ est dite de Lyapunov si

- *L atteint son minimum sur U en un unique point qui est x_0 ;*
- *pour tout $x \neq x_0$, la fonction $t \mapsto L(\phi_X^t(x))$ est strictement décroissante sur son domaine de définition.*

Remarque La seconde condition est en particulier vérifiée quand L est C^1 si $\langle \nabla L(x), X(x) \rangle < 0$ pour tout $x \neq x_0$.

Fonctions de Lyapunov
Cas autonome

Théorème

Si X est tel que $X(x_0) = 0$ et admet une fonction de Lyapunov en x_0 alors, x_0 est un équilibre asymptotiquement stable de X (quand $t \to \infty$).

Fonctions de Lyapunov
Cas autonome

Démonstration a) On introduit les ensembles $L^c = \{x \in U : L(x) < c\}$. Pour tout $\delta > 0$ il existe $c > 0$ tel que $L^c \subset B(x_0, \delta)$.
b) Comme $L(\phi^t_X(x))$ est décroissante, $\phi^t(x)$ reste dans L^c tant qu'il est défini et d'après le critère de sortie de tout compact le flot de X restreint à L^c est défini pour tout temps.
c) Pour $x \in L^c$, la limite $l := \lim_{t\to\infty} L(\phi^t(x))$ existe (la fonction est décroissante positive).
d) On a $l = 0$: en effet, soit $t_n \to \infty$ telle que $\phi^{t_n}(x)$ converge vers un $\bar{x} \in L^c$: $L(\bar{x}) = l$. On a en outre, $L(\phi^T(\bar{x})) = \lim_{n\to\infty} L(\phi^{t_n+T}(x)) = l = L(\bar{x})$. Donc $\bar{x}$ n'est pas un point de décroissance stricte de $L(\phi^t(x))$ et alors $\bar{x} = x_0$.
e) Ainsi, $\phi^t(x_0) \in L^{c(t)}$ où $c(t)$ peut-être choisi de façon que $c(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
f) D'après a) on a $\phi^t(x) \to x_0$ quand $t \to \infty$. □

Fonctions de Lyapunov
Cas non-autonome

Mentionnons la version non-autonome suivante :

Théorème (Critère de Lyapunov, version non-autonome)

Soit $X(t,x)$ tel que $X(t, x_0) = 0$ pour tout t et $L(\cdot)$ une fonction de classe C^1 définie au voisinage de x_0 telle que

$$\langle \nabla L(x), X(t,x) \rangle \leqslant -a(x)$$

où $a(\cdot)$ est une fonction définie au voisinage de x_0, continue, positive et ne s'annulant qu'en x_0. Alors, x_0 est asymptotiquement stable pour X. (quand $t \to \infty$).

Sommaire du cours 6

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Nous étudions à présent un exemple important qui intervient en Mécanique et en Physique.
Soit une particule de masse 1 se déplaçant en dimension 1 (q position, p impulsion) dans un champ de potentiel $V(q)$:

$$\ddot{q} = -\nabla V(q)$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\nabla V(q) \end{cases}$$

L'énergie mécanique du système $H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ est conservée au cours du mouvement : $\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = 0$.

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Le portrait de phase est donc facile à dessiner dans le plan (q,p) : les trajectoires sont situées sur les lignes de niveau de H, $H(q,p) = cste = E$.
Ces lignes de niveau sont des objets de dimension 1 ou 0, et en général sont : (a) des courbes (sous-variétés de dimension 1, cf. cours sur les sous-variéts) fermées et donc difféomorphes au cercle $\mathbb{S}^1$ ou ouvertes donc difféomorphes à $\mathbb{R}$ et (b) : des points (des points d'équilibre où le champ de vecteurs s'annule).

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Remarque :
De façon générale, si $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on définit un système hamiltonien ($i = 1, \ldots, n$)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\frac{\partial}{\partial p_i} H(q,p) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q,p) \end{cases}$$

Un calcul facile montre que si $(q(t),p(t))$ est solution du système précédent alors $\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = 0$. H s'appelle le hamiltonien du système.
En dimension plus grand, cela ne permet pas de déterminer les trajectoires simplement, sauf si l'on dispose de suffisamment d'intégrales premières (quantités conservées au cours du mouvement).

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Considérons à présent une perturbation (par exemple en rajoutant un terme de frottement) du système $(*)$:

$$\ddot{q} = -\nabla V(q) + \epsilon f(q, \dot{q})$$

ou sous forme d'E.D.O d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{q} = p + \epsilon f_1(q,p) \\ \dot{p} = -\nabla V(q) + \epsilon f_2(q,p) \end{cases}$$

Nous considérons dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = X_\epsilon(x) = X(x) + \epsilon F(x)$$

où $X(x) := X(q,p) = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla V(q) \end{pmatrix}$.

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Un exemple important (équation de Liénard) est quand $f_1(q,p) = 0$ et $f_2(q,p) = f(p)$. Quand $f(p) = p^3 - p$ on parle de l'équation de Van der Pol qui modélise des systèmes RLC avec une résistance non-linéaire.

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Considérons Σ un segment (dimension 1) transverse au flot de X (donc telle qu'en tout point d'intersection de Σ avec une orbite $\phi^t(x)$ on ait $\Sigma \oplus X(\phi^t(x)) = \mathbb{R}^2$.)
Si P_0 l'application de premier retour de Poincaré ainsi définie on a alors $P_0(x) = x$ pour tout $x \in \Sigma$.
Si ϵ est assez petit, Σ est aussi transverse au flot de X_ϵ. On note P_ϵ l'application de premier retour associée.
Calculons P_ϵ (de façon approchée) en estimant ϕ_ϵ^t.

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

D'après le théorème de dépendance différentiable par rapport au paramètre

$$\phi_\epsilon^t(x) = \phi_0^t(x) + \epsilon B(x,t) + O(\epsilon^2)$$

où $B(x,t)$ est obtenue en résolvant l'équation linéarisée le long du flot de $X_0(\cdot)$

$$v'(t) = DX(\phi_0^t(x)) \cdot v(t) + F(\phi_0^t(x)), \quad v(0) = 0;$$

ainsi, $B(x,t) = \int_0^t R_x(t,s)F(s)ds$ où $R_x(t,0)$ est la résolvante de

$$v'(t) = DX(\phi_0^t(x)) \cdot v(t).$$

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

En utilisant $\tau_\epsilon(x) = \tau_0(x) + \epsilon\tau_0'(x) + O(\epsilon^2)$ on a

$$\phi_\epsilon^{\tau(x)}(x) = x + \epsilon\tau_0'(x)X_0(x) + \epsilon B(x,\tau_0(x)) + O(\epsilon^2).$$

En projetant sur Σ parallèlement à $X_0(x)$ (ou $X_0(x) + \epsilon F(x)$, cela n'a pas d'importance)

$$P_\epsilon(x) = x + \epsilon b(x) + O(\epsilon^2),$$

où $b(x) = \mathrm{proj}_\Sigma(\int_0^{\tau_0(x)} R_x(\tau_0(x),s)F(s)ds)$.

Champs de vecteurs en dimension 2 : perturbations des flots conservatifs

Le champ de vecteur $X_\epsilon(\cdot)$ admet des orbites périodiques $\phi_\epsilon^t(y)$ ssi il existe $y \in \Sigma$ tel que $P_\epsilon(y) = y$ ou encore $b(y) + O(\epsilon)(y) = 0$.
Si b admet un nombre fini de zéros $y_1, \ldots, y_m$ tels que $b'(y_i) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous enseigne que pour ϵ suffisamment petit, il existe m zéros de $b(y) + O(\epsilon)(y)$, $y_1(\epsilon), \ldots, y_m(\epsilon) \in \Sigma$.
Comme $DP_\epsilon(y_i(\epsilon)) = 1 + \epsilon b'(y_i(\epsilon)) + O(\epsilon^2)$ est alors différent de ± 1, on voit que les orbites périodiques $\mathcal{O}(y_i(\epsilon))$ seront asymptotiquement stables ou instables.

Champs de vecteurs en dimension 2 : le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

La situation précédente est en fait typique.
On appelle ensemble ω-limite de x, l'ensemble $\omega(x)$ des points d'accumulation de $(\phi^t(x))_{t>0}$ (ensemble de toutes les limites possibles de sous-suites $\phi^{t_k}(x)$). On pose $\omega(X) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} \omega(x)$ (ensemble ω-limite de la dynamique).
C'est un fermé, positivement invariant par le flot, connexe s'il est borné.

Champs de vecteurs en dimension 2 : le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

Théorème (Poincaré-Bendixon)

Supposons que X n'ait qu'un nombre fini de singularités et que l'orbite positive de x, $\mathcal{O}^+(x) := \{\phi^t(x) : t \geqslant 0\}$ soit bornée.

(a) *Si $\omega(x)$ ne contient que des points réguliers alors $\omega(x)$ est une orbite périodique fermée.*
(b) *Si $\omega(x)$ contient des points réguliers et singuliers, alors $\omega(x)$ est l'union de ses points singuliers et d'orbites qui chacune tendent en $t \to \pm\infty$ vers ces points singuliers. (On parle de cycle limite.)*
(c) *Si $\omega(x)$ ne contient pas de points réguliers alors $\omega(x)$ est réduit à un point singulier.*

Champs de vecteurs en dimension 2 : le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

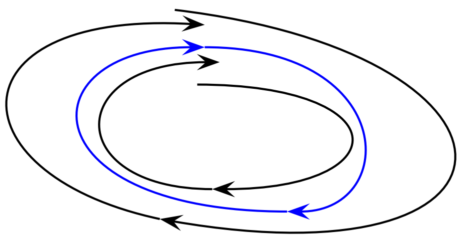

FIGURE: Orbite périodique attractive

Champs de vecteurs en dimension 2 : le théorème de Poincaré-Bendixon (complément)

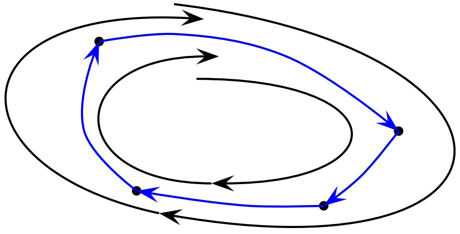

FIGURE: Cycle limite

Sommaire du cours 6

Conjugaison des champs de vecteurs

Problème : Etant donné un champ de X (qu'on suppose complet pour simplifier) sur $\mathbb{R}^n$ (ou un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$) trouver de nouvelles coordonnées dans lesquelles ce champ de vecteurs prenne une expression "plus simple".
Soit $x(\cdot)$ solution de $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$ et $f : \Omega \to \Omega$ un difféomorphisme de classe C^k, $k \geqslant 1$.
Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $y(\cdot) = f(x(\cdot))$?

Conjugaison des champs de vecteurs

On a

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(f(x(t))) \\ &= Df(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= Df(x(t)) \cdot X(x(t)) \\ &= Df(f^{-1}(y(t)) \cdot X(f^{-1}(y(t))\end{aligned}$$

et donc

$$\dot{y}(t) = Y(y(t)), \qquad y(0) = f(x(0)),$$

où $Y(\cdot)$ vérifie

$$Y(f(x)) = Df(x) \cdot X(x).$$

On note $Y = f_* X$

Conjugaison des champs de vecteurs

Remarquons que de façon équivalente si f est de classe C^k, $k \geqslant 1$

$$Y = f_* X \iff \phi_Y^t = f \circ \phi_X^t \circ f^{-1}.$$

Remarque importante : Si f est seulement continue, la relation de conjugaison entre les flots a un sens tandis que celle entre les champs de vecteurs n'en a pas. On dit que les flots de X et de Y sont topologiquement conjugués.

Redressement des flots

Théorème

Si X est de classe C^k $(k \geqslant 1)$ et si $X(x_0) \neq 0$ il existe un difféomorphisme h de classe C^k défini au voisinage de x_0 tel que

$$h_* X \equiv e_1$$

où e_1 est le champ de vecteurs constant égal à $(1, 0, \ldots, 0)$.

Démonstration

On note Σ une transversale à $X(x_0)$ en x_0 et on considère $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = \phi_X^t(u)$. On a déjà calculé $D\psi(0, x_0)$: $D\psi(0, x_0) \cdot e_1 = X(x_0)$ et $D\psi(0, x_0)_{|\Sigma} = D\phi^0_{X|\Sigma}(x_0) = DId_{|\Sigma} = Id$; donc, $D\psi(0, x_0)$ est inversible.

Redressement des flots

Le théorème d'inversion locale définit un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si on note $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \times \Sigma$ l'application affine qui envoie $(0, 0)$ sur $(0, x_0)$, e_1 sur X_0 et $(e_2, \ldots, e_n)$ sur une base de Σ, l'application $h := \psi \circ L$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Comme $\phi_{e_1}^t(s, y) = (s + t, \tilde{y})$ on a
$h \circ \phi_{e_1}^t(s, y) = h(s + t, \tilde{y}) = \phi_X^{s+t}(\tilde{y}) = \phi_X^t(\phi_X^s(\tilde{y})) = \phi_X^t(h(s, y))$. □